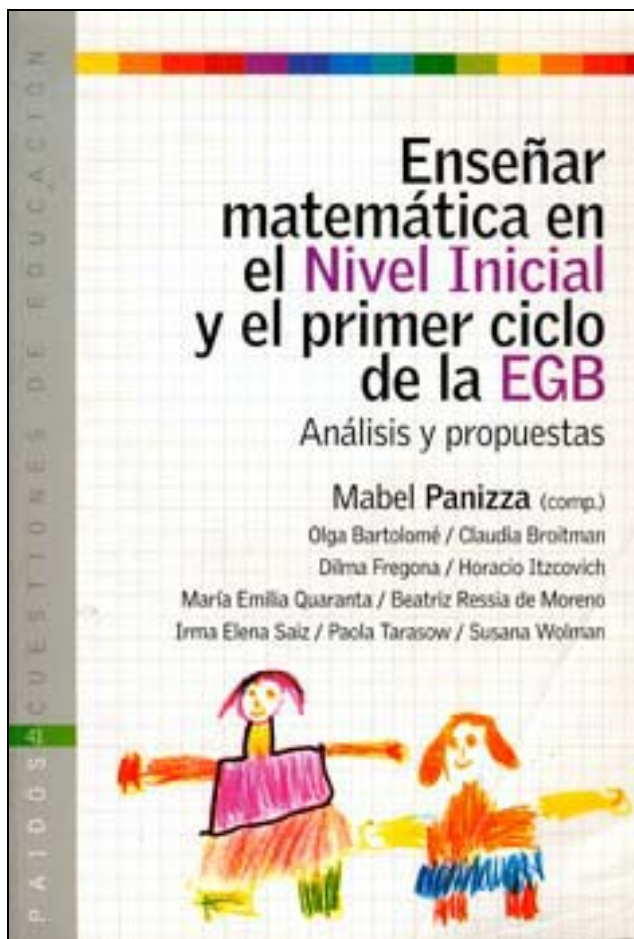


# Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB

Análisis y propuestas

Mabel Panizza (comp.)



1ª edición  
Buenos Aires, Paidós, 2003

Colección: Cuestiones de Educación  
Nº 41

Este material se utiliza con fines exclusivamente didácticos

---

## ÍNDICE

Los autores .....	11
Prólogo, <i>Cecilia Parra</i> .....	15
Introducción, por <i>Mabel Panizza</i> .....	27
1. Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática, por <i>Mabel Panizza</i> .....	31
1. Introducción .....	31
2. Acerca de la noción de sentido .....	32
3. Objetos de conocimiento y representaciones: primera aproximación .....	33
4. Distintas funciones de las representaciones para los alumnos .....	41
5. Problemas y cuentas: ¿una falsa diferencia? .....	44
6. Usos (y abusos) de las representaciones simbólicas .....	47
7. Enseñanza de los sistemas simbólicos: ¿un regreso al empirismo? .....	51
8. Síntesis en términos de saberes necesarios .....	54
Bibliografía .....	56
2. Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas, por <i>Mabel Panizza</i> .....	59
1. Introducción .....	59
2. La didáctica de la matemática de la escuela francesa .....	60
3. La teoría de situaciones didácticas .....	60
Bibliografía .....	71
3. La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel Inicial y el primer año de la EGB, por <i>Beatriz Ressia de Moreno</i> .....	73
1. Introducción .....	73
2. Acerca de los diferentes enfoques de enseñanza .....	74
3. La resolución de problemas .....	87
4. Los problemas y la enseñanza del número .....	101
5. Problemas para la enseñanza del número .....	112
6. Algunas consideraciones acerca de la enseñanza del sistema de numeración .....	121
7. Algunas consideraciones finales .....	125
Bibliografía .....	128
4. El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales, por <i>Olga Bartolomé y Dilma Fregona</i> .....	131
1. Introducción .....	131
2. La idea de número natural y la escritura de los números .....	134
3. El problema de contar .....	140
4. Diferentes aspectos del número y del conteo en la enseñanza .....	145
5. Los números en un problema de distribución .....	152
6. A modo de cierre .....	160
Bibliografía .....	161
5. Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas, por <i>María Emilia Quaranta, Paola Tarasow y Susana Wolman</i> .....	163
1. Introducción .....	163
2. Discutiendo los criterios de la enseñanza usual .....	166
3. Discusión .....	182
Bibliografía .....	187
6. Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute, por <i>María Emilia Quaranta y Susana Wolman</i> .....	189
1. Introducción .....	189
2. ¿Qué son los momentos de discusión? .....	190

3. Momentos de discusión y concepción didáctica .....	191
4. ¿Por qué las discusiones generan progresos? Algunas razones psicológicas y didácticas .....	194
5. ¿Cómo organizar momentos de discusión en las aulas? .....	198
6. Conclusiones .....	233
Bibliografía .....	242
7. La derecha... ¿de quién? Ubicación espacial en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB, por <i>Irma Elena Saiz</i> .....	245
1. Introducción .....	245
2. Caracterización de las situaciones planteadas .....	250
3. Secuencia didáctica: "La granja" .....	253
4. Sobre la orientación de los objetos .....	267
5. Secuencia didáctica: "El tobogán" .....	272
Bibliografía .....	287
8. Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza, por <i>Claudia Broitman y Horacio Itzcovich</i> .....	289
1. Introducción .....	290
2. Desde la geometría que estudia el espacio real hacia la geometría que crea un espacio matematizado .....	291
3. Entre lo sensible y lo inteligible: una gran variedad de problemas .....	296
4. Adquirir conocimientos y "un modo de pensar" geométricos como apropiación cultural .....	299
5. Problemas que permiten iniciar a los niños en el estudio de características de figuras y cuerpos geométricos .....	304
6. Conclusión.....	323
Bibliografía .....	323

---

# CAPÍTULO 6. DISCUSIONES EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA: QUÉ, PARA QUÉ Y CÓMO SE DISCUTE

*María Emilia Quaranta  
Susana Wolman*

## 1. Introducción

Según la opinión de muchos docentes, así como también para gran parte de la literatura didáctica, es necesario generar, en algún momento de las clases, una "puesta en común". Este concepto ha recibido las más dispares explicaciones e, incluso, las más variadas denominaciones (confrontación, discusión, reflexión, debate, etcétera). Habitualmente se define la "puesta en común" como una exposición, por parte de todos o algunos de los alumnos, de los resultados de una tarea o de los caminos que condujeron a esos resultados.

Ahora bien, aun cuando no se cuestiona la necesidad o importancia de estos momentos, no resulta para nada claro por qué o para qué son tan relevantes. Menos claro todavía resulta el modo como deben ser organizados y conducidos. Consideramos que la didáctica de la matemática constituye una fuente de conocimientos esencial para la tarea del docente. Intentaremos pues precisar el significado de estos momentos desde el enfoque de la enseñanza de la matemática que sostenemos y nos referiremos a algunas condiciones didácticas de la organización y gestión de instancias de discusión en el aula.

## 2. ¿Qué son los momentos de discusión?

Desde la didáctica de la matemática, los momentos de discusión involucran mucho más que una simple explicitación frente a toda la clase de las producciones individuales. Su valor central reside en que son potencialmente fructíferos para la generación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones (ERMEL, 1993, 1995).<sup>1</sup> En consecuencia, no se trata sólo de dar a publicidad una serie de enunciados; es necesario, además, buscar razones, argumentar intentando defender su verdad o falsedad.

Los momentos de discusión conforman una de las modalidades que adquiere la interacción entre pares en el aula: se trata de un intercambio entre todos los alumnos de la clase conducido por el docente. De ninguna manera constituyen "eventos naturales" de la vida en el aula: las discusiones no pueden quedar libradas a las contingencias de una clase o a la espontaneidad de los alumnos. Por el contrario, deben ser organizadas intencional y sistemáticamente por el maestro, a quien le corresponde un papel central e insustituible en su desarrollo: "Todo esto no se realiza espontáneamente, la intervención de la maestra es decisiva y, justamente, organizar con éxito el momento de la confrontación es una de las mayores dificultades que perciben los docentes" (Saiz, 1995).

El grupo ERMEL (1995) señala que corresponde al docente hacer sacar a luz –explicitar o hacer público–, hacer circular y, si es posible, analizar y someter a discusión por toda la clase las producciones de un alumno o un grupo de alumnos. Es el momento, bajo la conducción del maestro, de comunicar los procedimientos y resultados, difundirlos, intentar comprender los procedimientos de otros, compararlos, poder reconstruir aquellos que parecen más eficaces, valorar los aspectos positivos de las diferentes producciones, considerar cuán generalizables son a otras situaciones, confrontarlos, cuestionar y defender las diferentes proposiciones utilizando argumentos vinculados con los conocimientos matemáticos en cuestión.

También corresponde al docente hacer que los conocimientos que se han construido inicialmente contextualizados en relación con algunos problemas puedan ser, en cierta medida en estas instancias de discusión, descontextualizados y generalizables. Las discusiones tienen un papel muy importante en este desprendimiento de los procedimientos y conocimientos de aquellas situaciones en las cuales surgieron.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> ERMEL: equipo de didáctica de la matemática, perteneciente al Institut National de Recherche Pédagogique, Francia.

<sup>2</sup> Ninguna discusión abarca exhaustivamente todos estos aspectos. Como veremos en los ejemplos, una discusión puede asumir algunos de ellos, de acuerdo con los objetivos de enseñanza

### 3. Momentos de discusión y concepción didáctica

*"Cuando les propongo a mis alumnos que comparen los resultados que obtuvieron luego de resolver un problema, la mayoría rápidamente comprueba que lo tiene bien y los que no... bueno, ya sabemos, son los mismos de siempre... "*

Daniela, maestra de tercer año.

*"Yo sí los hago trabajar en grupo porque todos algo siempre aprenden "*

Natalia, maestra de segundo año.

Proponer que los alumnos de una clase discutan e intercambien ideas no es una novedad en educación. Sin embargo, para muchos docentes la organización de momentos particulares en los que se discuta acerca de contenidos específicos es dificultosa. Otras veces, y tal vez desconociendo o dudando de su importancia para lograr la evolución de los conocimientos, estos momentos quedan abandonados a "sólo unos minutos y de vez en cuando". En ambas circunstancias, el sentido último de las situaciones de discusión entre los alumnos permanece difuso. No se trata, adelantamos, de una habilidad personal de algunos docentes para conducir de determinada manera una clase. Consideraremos la propuesta de organizar momentos de discusión, confrontación y reflexión en la enseñanza de la matemática desde un determinado enfoque, una concepción de la didáctica de la matemática caracterizada, entre otras cosas, por el tipo de trabajo en relación con la resolución de problemas y la reflexión acerca de lo realizado (véase el capítulo 1, en este mismo volumen).

En el campo del aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina constantemente se ha destacado la importancia de la resolución de problemas. Sin embargo, la función que se les ha adjudicado no siempre ha sido la misma. En la versión más generalizada, son considerados como momentos propicios para la "aplicación" de aquellos conocimientos recientemente enseñados: aparece así en escena el famoso "problema tipo" que, si bien frente a las críticas recibidas ha variado en su formulación, no lo ha hecho en cuanto a su función en la enseñanza. Otras veces, el problema aparece como motivación e introducción de un "tema" que el docente explica a sus alumnos. Desde otras concepciones se supone también que la resolución de problemas por sí sola genera automáticamente aprendizaje matemático, poniendo en juego y desarrollando habilidades lógicas y matemáticas involucradas en los procesos de resolución. Ninguna de estas posiciones corresponde al modo como nosotros entendemos el lugar de los problemas en el corazón del aprendizaje matemático.

Por otro lado, frecuentemente se señala que los alumnos no saben resolver problemas. Así lo testimonian las preguntas acerca de la operación a realizar que formulan frente a un enunciado: "¿es de más?", "¿qué cuenta hay que hacer?", "¿hay que dividir?". Estas preguntas surgen especialmente cuando faltan las palabras clave que "dan pistas" o sugieren la operación a realizar. Encontramos así una escena reiterada en el aula: los alumnos saben "hacer las cuentas" pero no reconocen en qué situaciones es pertinente utilizarlas. Un ejemplo de esto último es cuando "conocen" algunas tablas de multiplicar, pero no reconocen las situaciones en las cuales la multiplicación puede ser el camino para su solución. En definitiva, esos conocimientos permanecen vacíos de sentido en tanto no constituyen herramientas movilizables para resolver problemas.<sup>3</sup>

Desde la concepción didáctica que adoptamos aquí, se destaca que lo esencial en el aprendizaje de la matemática es construir el *sentido de los conocimientos* y que la resolución de problemas es una actividad ineludible para ello. Los problemas aparecen, pues, como el medio fundamental para la enseñanza de un concepto. Pero no se trata de cualquier problema sino de aquellos a los cuales responden los contenidos que se quieren transmitir. A través de ellos, los alumnos construyen sus conocimientos, puesto que promueven actividades de búsqueda donde se ponen en juego los conocimientos ya construidos adaptándolos como herramientas de solución para esa nueva situación. Esto constituye un cambio de enfoque radical, ya que la resolución de problemas no se reduce al momento de la "aplicación" de lo previamente "enseñado" (cuentas, fórmulas, procedimientos de medición, de construcción de figuras, etcétera).

---

<sup>3</sup> En varios capítulos de este volumen podrán encontrarse referencias al "sentido" de los conocimientos y cómo muchas veces la enseñanza usual no logra que los alumnos vinculen los contenidos matemáticos con aquellas situaciones en las cuales funcionan como medios de solución

En ese sentido, Charnay (1994) afirma que la actividad debe proponer un verdadero problema por resolver, debe permitir utilizar los conocimientos anteriores y, al mismo tiempo, ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar esos conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a conocer sus límites, a elaborar nuevos.

Desde esta perspectiva se proponen distintos problemas buscando ampliar el sentido de un concepto. Otros problemas pueden presentarse para sistematizar determinados conocimientos y también, por qué no, para ejercitarlos –ejercitación que se realiza comprendiendo qué se hace y por qué se lo hace–. Encontramos aquí una de las diferencias con la idea de "aplicación" que hemos señalado, ya que cada nuevo problema brinda la oportunidad de enriquecer el significado de lo aprendido.

- a) Juan tenía 5 figuritas y ganó 7. ¿Cuántas tiene ahora?
- b) Juan tenía algunas figuritas y perdió 5. Ahora tiene 7. ¿Cuántas tenía antes?

Estos enunciados se ubican en el amplio campo de los problemas aditivos que Vergnaud (1979, 1986) nos enseñó a distinguir. Probablemente los alumnos muy pequeños puedan resolver el primero, pero duden al intentar resolver el segundo –aun cuando convencionalmente se resuelva con el mismo cálculo– o, acostumbrados "a buscar pistas" en el enunciado para descubrir la operación que deben hacer, consideren la palabra "perdió" y realicen una resta. ¿Podemos afirmar entonces que los alumnos que resuelven el primero saben sumar? Si saben resolver el primero, ¿es suficiente entonces brindarles más ejercitación sobre lo mismo para que "afiancen" el concepto? Lo que queremos rescatar es que no alcanza con saber desplegar algún procedimiento de suma, ni basta con poder resolver un conjunto restringido de problemas. Es necesario trabajar sobre la amplia gama de situaciones que un concepto permite resolver.

Ahora bien, si resolver problemas es una condición necesaria para aprender matemática, no es para nada suficiente. El *aprendizaje matemático*, como ya mencionamos, *se basa en la resolución de problemas y la reflexión acerca de lo realizado*: los procedimientos empleados, los conocimientos involucrados deben convertirse en objeto de reflexión. Los intercambios con los compañeros y el docente son aquí cruciales: es decir, las explicitaciones, las confrontaciones y las justificaciones entre los alumnos constituyen un factor de progreso para todos. Permiten ir construyendo el camino que los llevará a validar el trabajo que se hace. Esta actividad reflexiva enriquecerá, recíprocamente, las futuras resoluciones de todos los alumnos.

Colocar a la resolución y reflexión en torno a problemas en el centro del aprendizaje y la enseñanza de la matemática no implica, en absoluto "borrar" el papel del maestro en esta actividad. Nada más lejos de ello. Su participación es altamente determinante. Como lo veremos "en vivo" en los ejemplos que analizaremos más adelante, los momentos de discusión requieren también de una participación activa del docente, que no se limita sólo a proponerlos: debe conducirlos y para ello –como ya mencionamos es necesaria una intervención que incite a los niños a explicitar lo realizado, aceptando todas las respuestas sin validar de entrada la correcta, retomando para todo el grupo lo que dicen algunos alumnos, planteando contraejemplos, ayudando a establecer acuerdos, recordando acuerdos anteriores en relación con los conocimientos, etcétera.

En síntesis, los niños construyen los conocimientos partiendo de su uso frente a problemas y la reflexión en torno a ellos, la organización sistemática de instancias de discusión en la clase ocupa un lugar insustituible en este proceso.

#### **4. ¿Por qué las discusiones generan progresos?**

##### *Algunas razones psicológicas y didácticas*

*"Yo no propongo mucho trabajo en pequeños grupos, porque me doy cuenta de que aprender no aprenden. Lo único que hacen, además de mucho barullo, es copiarse de los que más saben. "*

Laura, maestra de segundo año.

*"Cuando les doy un problema, primero les pido que lo resuelvan solos, luego les pido que comparen con un compañero para que piensen y discutan por qué cada uno lo resolvió de esa manera y que juntos vean si hay acuerdo. "*

Cecilia, maestra de segundo año.

Hace ya muchos años que se reconoce la importancia de la interacción social entre los alumnos, el trabajo con "los otros". Uno de los modos más habituales que asume en la enseñanza de la matemática es el trabajo en grupos, específicamente en el momento de la resolución de un problema.

Si bien ya era conocida su importancia y se recomendaba propiciar el trabajo grupal desde una dimensión educativa, es decir, independientemente de que se tratara o no de resolución de problemas, son los estudios de la psicología social genética<sup>4</sup> los que han avanzado mostrando los efectos positivos de la cooperación en la búsqueda común de la solución a un problema.

La situación de *resolución conjunta* entre alumnos es positiva porque facilita coelaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado. Este proceso requiere tener en cuenta lo que dicen otros compañeros, las sugerencias que hacen, explicitar y justificar las elecciones, provocando intercambios cuya riqueza radica en que posibilitan tomar conciencia sobre algún aspecto no considerado del problema, reformularlo, descubrir nuevos aspectos, cuestionar otros, etcétera.

A pesar de su riqueza, a la hora de implementar en el aula la solución conjunta de problemas -que no es la única manera de propiciar la interacción social-, se presentan limitaciones tales como que alguno de los alumnos del grupo asuma "la dirección de la solución" y los demás lo acepten -tal vez por su "fama de bueno en matemática"-, pero sin poder reutilizarlo por su propia cuenta en otra situación,<sup>5</sup> o que algún participante, sin esgrimir argumentos del orden matemático, esté sistemáticamente en desacuerdo con las propuestas de los otros. Por otro lado, los docentes no pueden llegar a conocer la mayor parte de las argumentaciones que esgrimen los alumnos en los pequeños grupos. Estas dificultades son salvables desde la organización y conducción de las situaciones de enseñanza y no anulan el carácter productivo de las interacciones.

Ahora bien, en nuestro caso en particular, no estamos enfocando el trabajo de resolución en pequeños grupos sino las puestas en común y las discusiones que deben originar, y si bien estos momentos se organizan para cumplir diferentes funciones, comparten algunos principios en cuanto a los beneficios de la interacción en el aprendizaje, ya que tienen como dimensión transversal el tratarse de momentos de intercambio, explicitación y debate que, como afirma el grupo ERMEL (1995), constituyen un "potente incentivo de progreso en el aprendizaje".

Existen, además, razones de orden estrictamente *didáctico* para propiciar los momentos de discusión de toda la clase. Aquí es necesario referirnos a la *teoría de las situaciones didácticas* elaborada por Guy Brousseau (1986, 1994), que propone asociar los conocimientos matemáticos a distintos tipos de situaciones susceptibles de hacer funcionar diferentes dinámicas sociales. Mencionemos brevemente que las situaciones concebidas para hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos se denominan situaciones a-didácticas. Están constituidas por problemas a los cuales son confrontados los alumnos y la organización de estas situaciones permite la evolución de sus conocimientos matemáticos. La denominación de a-didácticas responde a que desaparece de ellas -momentánea y aparentemente- la intencionalidad didáctica. Es el alumno, y no el maestro, quien pone en escena al conocimiento en función de los requerimientos de la situación.

*Estos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerlo actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por su propio movimiento. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer* (Brousseau, 1986).

Las diferentes situaciones a-didácticas elaboradas por Brousseau tienen relación, por una parte, con la idea de propiciar un trabajo autónomo del alumno -que le permitirá construir su propio conocimiento- y, por otro lado, se vinculan con los diferentes *status* de un concepto matemático. Nuestro autor distingue diferentes clases de situaciones a-didácticas ligadas a los diferentes niveles de sentido de los conocimientos:

---

<sup>4</sup> Gilly (1988) reconoce dentro de esta línea dos corrientes: "La primera corriente, llamada de psicología social genética [...] se interesa en el rol de las interacciones sociales entre pares en el desarrollo de la inteligencia en general, referida a la teoría estructuralista piagetiana. La segunda corriente [...] se diferencia de la precedente en su interés por la construcción de competencias limitadas a clases de problemas y la referencia a la perspectiva procedimental adoptada en resolución de problemas".

<sup>5</sup> En la vida del aula es difícil controlar esta situación ya que los alumnos reconocen y confían en el que más sabe y pueden llegar a desechar su propia estrategia aun cuando sea acertada. En ese sentido, la propuesta de la segunda maestra del epígrafe de este apartado es una alternativa interesante para resolver, en parte, esta limitación.

de acción, de formulación y de validación, de acuerdo con las interacciones del sujeto con el medio, la función que cumpla en ellas el saber al que se apunta (uso, representación, demostración), etcétera.

Para que los alumnos puedan evolucionar en sus conocimientos es necesario, entonces, que *actúen* para resolver problemas (situaciones de acción), es decir, que las situaciones propuestas provoquen la elaboración y la puesta en funcionamiento de conocimientos implícitos; que los *puedan explicitar*, que los *expresen en un lenguaje* comprendido por todos (situaciones de formulación) y que *validen* su utilización por medio de pruebas (situaciones de validación).

Ahora bien, Laborde (1991) afirma que

*[...] son finalidades de tipo social las que permiten el pasaje de una fase de acción a una fase de formulación y de esta última a una fase de validación. La puesta en acción de una finalidad de tipo social es el instrumento utilizado aquí para modificar la significación de los conocimientos en los alumnos.*

Vemos de esta manera que estas situaciones están en gran parte determinadas por las interacciones sociales que las constituyen. En este sentido, encontramos que las situaciones de formulación y de validación requieren "un otro" (real o hipotético) a quien se destina la producción. En las situaciones de formulación se requiere la expresión de informaciones pertinentes en un lenguaje o código que el niño conoce o crea. El lenguaje simbólico sirve, entonces, para expresar informaciones en situaciones que justifican su empleo. Tales situaciones contribuyen, por otra parte, a *volver explícitos modelos* que los niños utilizan en la resolución de los problemas.

Las situaciones de validación, por otro lado, dan lugar a debates entre alumnos que, organizados por el docente, posibilitan que se expliciten y se argumente sobre lo realizado; constituyen, de esta manera, un medio para establecer pruebas o refutarlas. Se trata, como dice Balacheff (1982) citando a Piaget, de extraer las "razones" para "responder a la cuestión del porqué". Según esta teoría, entonces, las situaciones didácticas hacen jugar diversas modalidades socio-interactivas -no siempre ni necesariamente conflictivas-, que entran en escena en situaciones de aprendizaje específicamente organizadas y necesariamente vinculadas con distintos aspectos de los saberes matemáticos. Es decir, las interacciones sociales están incluidas en el estudio del funcionamiento del aprendizaje matemático en situación de clase.

Para que los efectos de estas interacciones sean benéficos, las participaciones de los alumnos deben cumplir con ciertas características, tales como que comprometan sus propias convicciones, expliciten sus puntos de vista acerca del problema considerado, ofrezcan explicaciones de los procedimientos realizados, utilicen un lenguaje comprensible, esgriman argumentaciones de orden matemático y no simplemente opiniones. Todo ello implica, por otra parte, una toma de distancia y una actitud reflexiva en relación con los conocimientos individuales. Estos intercambios obligan al alumno a descentrar su pensamiento, su propio punto de vista, le abren el ámbito de posibilidades hasta llegar, a veces, a perturbar la propia posición.

Trajimos aquí estas investigaciones porque sus resultados nos permiten comprender por qué los momentos de explicitación, justificación y debate en las aulas son tan propicios para generar avances en los conocimientos de nuestros alumnos. Aun cuando no se trabaje con situaciones didácticas en el sentido fuerte en que las define Brousseau, las instancias de discusión posibilitan momentos de reflexión conjunta en la clase a propósito de lo realizado. Sin embargo, si nos parece condición que los alumnos hayan enfrentado previamente la tarea de manera relativamente autónoma; de lo contrario, ¿sobre qué se discutiría si no hubiera una resolución de los alumnos por sí mismos?

## **5. ¿Cómo organizar momentos de discusión en las aulas?**

*"Al principio, cada vez que un alumno participaba, los chicos esperaban que yo indicara si estaba bien o mal. "*

Alejandra, maestra de segundo año.

No es posible definir un modo general de organizar estos espacios válido para todas las ocasiones, porque los momentos de discusión dependen, entre otras cosas, de los diferentes objetivos de enseñanza, del contenido matemático en cuestión y de los conocimientos de los alumnos. Optamos entonces por analizar fragmentos de registros de clases de primer ciclo de la EGB, centrándonos en algunas condiciones didácticas de las discusiones en el aula, en particular en relación con las intervenciones del maestro. Presentaremos cuatro ejemplos: los dos primeros corresponden a diferentes problemas aditivos en distintos contextos



didácticos; el tercero, a un problema de división, y el último, a una búsqueda de diferentes maneras de resolver una suma.<sup>6</sup>

### **5.1. Primera situación: resolución de problemas aditivos**

#### **Contexto didáctico**

La primera situación corresponde a un segundo año en el que la maestra está comenzando a instalar en sus clases de matemática un nuevo modo de funcionamiento vinculado al enfoque didáctico que desarrollamos anteriormente, en particular en relación con la resolución de problemas. Está llevando a sus alumnos a que, frente a los problemas que se les plantean, desarrollen un cierto trabajo autónomo. Esto es, que se enfrenten al desafío de resolverlos poniendo en juego los conocimientos de que disponen, sabiendo que ello no implica necesariamente aplicar una determinada operación, sino que es legítimo y necesario propiciar la búsqueda de diversos caminos personales de resolución, probando, equivocándose, ajustando sus procedimientos, controlando los pasos que van dando. Se trata de un trabajo donde el docente no es el único que establece si es correcto o incorrecto lo que hace el alumno.

La maestra propone entonces a sus alumnos el siguiente problema:

En 2° A hay 27 alumnos y en 2° C hay 18. ¿Cuántos alumnos más que en 2° C hay en 2° A?

La maestra eligió este problema porque consideró importante ampliar el campo de los problemas de sumas y restas que venían trabajando sus alumnos. Sabía que los problemas de comparación, referidos a una diferencia entre dos medidas (en nuestro ejemplo, la cantidad de alumnos de cada grado), ofrecen ciertas dificultades para los niños pequeños y que era necesario iniciar su enseñanza. Al planificar la clase, había anticipado -inspirándose en estudios didácticos- cuáles eran las resoluciones posibles para este problema:

- Hacer una resta ( $27 - 18$ ) corresponde a la solución canónica. Sin embargo, no es esperable que los alumnos vinculen de entrada este problema con una resta dado que el enunciado no menciona la disminución de alguna cantidad.
- Contar hacia atrás desde 27 hasta 18, controlando -con los dedos, marcas en el papel, etcétera- la cantidad de números que se dicen: 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18.
- Calcular el complemento de 18 a 27 mediante una suma:  $18 + \dots = 27$ , o contando desde 18 hasta 27.
- En el caso de utilizar el conteo, algunos alumnos pueden recurrir a una representación gráfica dibujando ambas colecciones -o sólo la más numerosa- y compararlas, estableciendo sobre la más numerosa hasta dónde son equivalentes y cuál es la diferencia entre ambas.

Estas anticipaciones permiten al docente una planificación de su clase que, por cierto, podrá corresponderse en mayor o menor medida con la realidad, y se irá ajustando en su desarrollo de acuerdo con lo que suceda efectivamente en el aula. Son previsiones que permiten tomar conciencia de que no existe una única manera de resolver un problema -la canónica-, conocer la variedad de caminos posibles para hacerlo, comprender qué es lo que hacen los niños cuando despliegan procedimientos personales y anticipar cómo intervenir.

En la organización de la discusión, estas previsiones permiten establecer los ejes en torno de los cuales se intentará hacerla girar, así como elaborar intervenciones posibles para las diferentes cuestiones que pudieran aparecer. Esto no significa que algunas de las intervenciones reales de la clase no se gesten a partir de lo que surge en su desarrollo, pero este trabajo siempre será más rico si el maestro cuenta con todo un respaldo de posibilidades para orientar su clase en dirección hacia lo que se trata de enseñar.

---

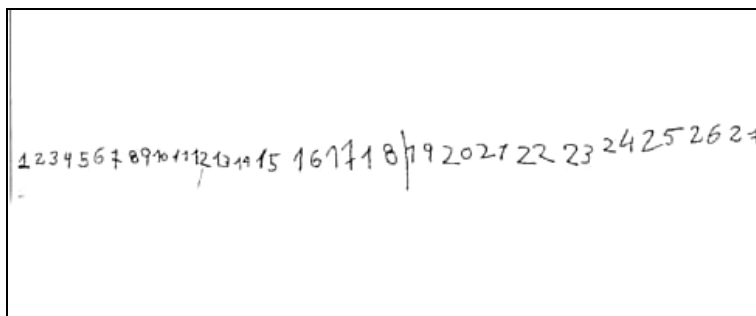
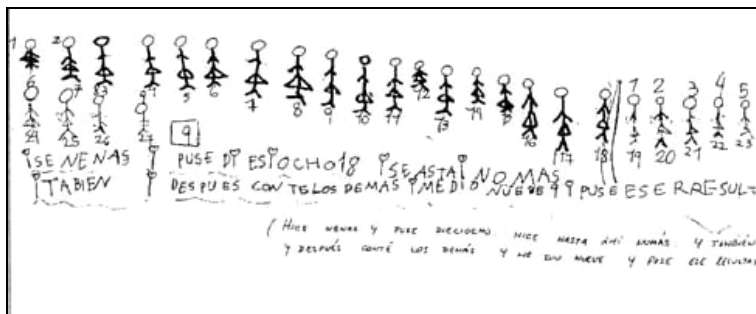
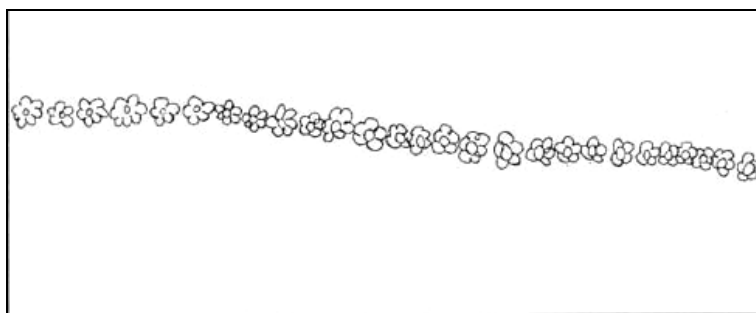
<sup>6</sup> Agradecemos a las docentes Antonia Bertolino, Cecilia Briano, Mariana Florio, Cecilia Giudice, Mariángeles Spataro y Gabriela Spósito, y a las siguientes instituciones: Escuela N° 69 de Gregorio de Laferrere, Provincia de Buenos Aires; Colegio Numen e Instituto Valle Grande de la Ciudad de Buenos Aires.

### Desarrollo de la situación

Volviendo al problema presentado en este segundo año, la maestra copia el enunciado en el pizarrón, lo lee en voz alta y dedica unos instantes a comentar de qué se trata, si hay algo que no se entiende, etcétera. Luego aclara que hay diferentes maneras de buscar la respuesta, que cada uno puede hacerlo como le parezca y que anoten lo que necesiten para resolverlo en las hojas que se acababan de repartir.

Mientras los alumnos resuelven, la maestra recorre los bancos mirando cómo lo hacen, respondiendo dudas, cuidando siempre de no sugerir o indicar el procedimiento a utilizar, y seleccionando los procedimientos que se discutirán luego. Cuando los alumnos se acercan a preguntarle si está bien lo que hicieron o cómo hacerlo, les responde, por ejemplo: "Ahora cada uno lo resuelve como le parece, después lo vamos a conversar entre todos". Esto es importante porque se trata de un momento en el cual los docentes, habitualmente, dan muchas indicaciones para que los alumnos realicen "lo correcto".

En muchos de los procedimientos que aparecieron, los niños apelaron a representaciones gráficas: dibujaron la colección mayor marcando de alguna manera (señalando, tachando, etcétera) sobre ella hasta dónde era equivalente a la otra y contando a partir de allí la diferencia. Otro procedimiento, similar al anterior, consistió en escribir la serie de los números hasta 27 y, sobre ella, contar la cantidad de números desde 18 a 27, o hacerlo directamente sobre la banda numérica.<sup>7</sup>



<sup>7</sup> Se trata de una serie de números escritos en forma alineada, cuya extensión puede ir prolongándose progresivamente de acuerdo con las necesidades, dispuesta en la clase para todos los alumnos, como una fuente más de información (véase el capítulo 3 en este mismo volumen).

Algunos alumnos no podían desplegar ningún procedimiento para comenzar a resolver este problema. Entre ellos, algunos entendían que se les estaba preguntando cuál era el grado más numeroso, algo común en relación con esta clase de problemas. En su recorrida entre los bancos, al advertir estos bloqueos, la maestra les proponía la misma situación pero con números mucho más pequeños, 3 y 5 por ejemplo. Algunos pudieron iniciar así una búsqueda, otros no. La discusión grupal será luego una instancia en la que podrán advertir la existencia de caminos de resolución que no llegaron a descubrir por sí solos.

La mayoría apeló a algún tipo de marca gráfica como apoyatura para poder contar y comparar la cantidad de alumnos de ambos grados. Queremos subrayar que se trata de apelaciones al dibujo por decisión propia de los alumnos. La maestra no les sugirió este procedimiento como tampoco ningún otro. Sólo a algunos niños que no podían iniciar alguna resolución, les propuso: "¿No sabés qué hacer? Hacer un dibujo, ¿te ayudará a pensarlo?". Pero sólo lo hizo con el fin de que pudieran imaginarse de alguna manera la situación, no como condición previa a una resolución numérica. Ella sabe, tal como muestran las investigaciones actuales en didáctica de la matemática, que los procedimientos de resolución no se inician necesariamente con una representación gráfica ya que, al contrario de una idea bastante difundida, la resolución de los problemas no sigue necesariamente una progresión desde resoluciones concretas a representaciones gráficas y, finalmente, representaciones simbólicas.

Este contraste entre lo que la maestra había previsto y los procedimientos que de hecho aparecieron nos muestra cómo las planificaciones son bosquejos de clases, que luego se adaptan a lo que aparece sobre la marcha. En efecto, en este caso, no se presentaron procedimientos que recurrieran al cálculo sino basados en el conteo.<sup>8</sup>

Para observar lo que los alumnos hacían, la maestra eligió dos procedimientos que sometería a discusión: el de Daiana, que dibujó sólo la colección mayor y contó sobre ella la diferencia entre ambas colecciones, y el de Nerina, que se apoyó en la banda numérica. La puesta en común se centraría, por un lado, en la difusión del procedimiento consistente en apoyarse en la serie numérica, de modo tal que los alumnos que no lo habían utilizado pudieran apropiarse de él, o al menos tomar conciencia de la existencia de otro procedimiento además del propio. Por otro lado, la maestra quería que los alumnos explicitaran o reflexionaran cómo se realizaba la comparación, qué parte de la colección mayor era equivalente a la menor y cómo se establecía, entonces, la diferencia entre ambas y en qué se distinguían los dos procedimientos seleccionados para realizar estas acciones. Cuando los alumnos terminaron de resolverlo, la maestra inició la puesta en común.

*M.:<sup>9</sup> Bueno, ahora vamos a conversar entre todos sobre lo que estuvimos haciendo. Daiana, ¿querés contarles a los chicos cómo lo pensaste? Vení con tu hoja, hacelo bien grande acá en el pizarrón para que todos lo vean y contales cómo lo averiguaste.*

*Daiana: Yo puse todas las flores y después...*

*M.: Hacé lo que hiciste, Daiana.*

*Daiana le pide a su maestra que lo realice en el pizarrón.*

*M.: (Comienza a dibujar una fila de flores en el pizarrón). ¿Vieron que algunos pusieron palitos? Bueno, ella, en vez de palitos, puso flores. Por cada alumno hizo una flor, entonces puso todos los alumnos que había en 2ºA. ¿Cuántos eran los de 2ºA?*

*Varios alumnos afirman que eran veintisiete.*

*M.: Bueno, a ver, fíjense si no me equivoco. (Continúa dibujando la fila de flores mientras los alumnos cuentan en voz alta). Y después, Daiana, ¿qué hiciste? Contales.*

*Daiana: Después conté cuántos había en el otro.*

*M.: ¿Cuántos había en el otro grado?*

*Alumnos: Dieciocho.*

*M.: Contó dieciocho ¿Me ayudan?*

*Alumnos: Sí. (Cuentan a medida que la maestra señala.)*

*M.: ¿Por qué habrá contado acá dieciocho?*

*A.: Son los de 2º C; los otros tiene de más.*

*A.: Y le quedan nueve.*

*A.: Contó los que le quedaron.*

*M.: Claro, contó los que le quedaron, ¿sí? ¿Cuántos le quedan acá?*

*A.: Nueve.*

<sup>8</sup> La vinculación de esta clase de problemas y las operaciones será objeto de sucesivos trabajos por parte de la maestra

<sup>9</sup> En los registros de clase, se utilizará "M" para "maestra" y "A" para "alumno".

M.: *Le quedaban nueve. Así averiguó cuántos alumnos más había en 2° A que en 2° C. Hubo varios que usaron esta manera de averiguarlo, ¿no? Algunos en vez de flores hicieron corazones; otros, palitos por cada nene. Otros, ¿saben qué hacían? En lugar de contar solamente los 18 de 20 C, los iban tachando. (Hace gesto de tachar algunas de las flores que estaban dibujadas en el pizarrón.) Ahora yo les quiero preguntar algo, ¿qué tienen de parecido estas formas de resolverlo?*

A.: *Los veintisiete.*

M.: *Los veintisiete, ¿qué eran?*

A.: *Los alumnos de 2° A*

M.: *¿Y cómo hacían para averiguar cuántos alumnos más que en 2° C hay en 2° A?*

Algunos alumnos responden que contando, otros tachando.

M.: *¿Qué es lo que contaban o tachaban?*

A.: *Dieciocho alumnos.*

A.: *Los de 2 C.*

M.: *De 2° C. ¿Saben una cosa? Yo no entiendo cómo, si eran de 2° C, los marcaron acá donde estaban estos 27 que son los de 2° A.*

A.: *De 2° A quiso sacar 18 de 2° C, para ver cuántos le quedaban. Los que te sobran son los que te da.*

Hernán: *Porque hasta acá (haciendo una marca en la 181 flor) eran iguales los dos grados.*

M.: *Ah, Hernán dice que hasta acá eran iguales los dos grados, que tenían la misma cantidad de alumnos. ¿Y éstos? (Señala los restantes.)*

A.: *Nueve, contás los que te quedaron.*

A.: *Los que tiene de más, los que no son iguales.*

M.: *Otros lo resolvieron de otra manera. Por ejemplo, Nerina, contales a los chicos cómo lo resolviste.*

Nerina: *(Se acerca a la banda numérica.) Del dieciocho salí hasta el veintisiete y me dio diez porque yo conté el dieciocho. Cuando no lo conté me dio nueve. Acá, desde dieciocho puse la mano acá (apoya la mano en el 18 de la banda numérica).*

Laura: *Seño, ¿contó lo de adentro o lo de afuera?*

M.: *Nerina, Laura quiere saber si contaste los de adentro o los de afuera. ¿Los de adentro de dónde querés decir, Laura?*

Laura: *Del otro número (señala entre el 1 y el 18).*

Nerina: *¡No! ¡Yo conté éstos! (Señala los números entre el 18 y el 27.)*  
*Yo no conté ni éstos (señala los números del 1 al 18 en la banda numérica)*  
*ni éstos (señala los números del 27 en adelante sobre la misma banda); conté éstos (vuelve a marcar los números entre el 18 y el 27).*

M.: *Y éstos, ¿por qué no los habrá contado? (Señala los números hasta el 18.)*

A.: *Porque te da más, te da uno, dos, tres, ... diecisiete y entonces como acá había nueve tenía que llegar hasta acá.*

M.: *Pero antes de resolverlo izar sabíamos que la respuesta era nueve, podía ser más o menos.*

Pablo: *Yo sí conté éstos y después los saqué. Cuando terminé de contar hasta acá (señala el 18), conté esto (señala los números del 19 al 27).*

M.: *Pablo hizo veintisiete palitos. Y él dice que sí contó los primeros dieciocho y los tachó y después contó el resto. Es algo parecido a lo que había hecho Daiana, ahí sí tuvimos que contar los dieciocho para saber hasta dónde había igual de alumnos que en 2° C. Y como lo hizo Nerina, ¿era necesario que contara estos dieciocho? ¿Por qué les parece que habrá empezado acá en el diecinueve y no volvió a contar estos de acá?*

A.: *No volvió a contarlos otra vez porque me parece que ya sabía que ahí había dieciocho.*

M.: *Los chicos dicen que ahí, donde están los números escritos, ya saben que hay dieciocho, que no necesitan contarlos. ¿Están todos de acuerdo?*

Algunos alumnos: *Sí.*

M.: *¿Qué hay de parecido y de diferente entre esta manera de averiguarlo y esta otra? (Señala la resolución de Daiana sobre el pizarrón y la banda numérica sobre la cual Nerina explicó la suya.)*

A.: *Los veintisiete y los dieciocho.*

M.: *¿Vos querés decir que en los dos están los veintisiete y los dieciocho?*

A.: *Los de 2° A y 2° C.*

M.: *Pero yo en éste (señala la fila de flores sobre el pizarrón) no veo los números.*

A.: *No, los números no, las flores, que son alumnos.*

A.: *Pero ahí (mira la banda) sí están los números. Por eso no había que contar los de adentro.*

M.: *Ustedes están diciendo que en los dos están representados de alguna manera los veintisiete y los dieciocho: en uno con flores, palitos u otras enarcas; en el otro, con números. Y cuando usaron los números no hizo falta contar hasta el dieciocho porque ya sabían que ahí había dieciocho. Entonces sólo tenían que contar los que había de más. Muy bien, chicos, ¡cómo trabajaron! Vimos que hay distintas maneras de resolver estos problemas. Otro día vamos a seguir trabajando y conversando entre todos con otros problemas...*

Como podemos observar, la discusión se centró en la explicitación, el análisis y la comparación de los procedimientos seleccionados.

La maestra realiza -como veremos también en los ejemplos siguientes una selección de lo que propondrá para la discusión. No se trata de que cada alumno pase y cuente cómo lo resolvió. Esto haría la clase muy tediosa y escuchar interminables relatos de lo mismo no aportaría al objetivo perseguido.

Una dificultad que se suele presentar cuando los alumnos exponen sus procedimientos es que se dirijan al docente y no a sus compañeros. Es necesario pedirles que hablen para toda la clase, que escriban grande para que todos lo vean, como así también adelantarles a los demás que van a tratar de entender cómo lo pensó determinado alumno, que si hay algo que no entienden o con lo que no están de acuerdo, levanten la mano para preguntarle o decirle, etcétera.

La maestra formula preguntas que constituyen para sus alumnos nuevos problemas en relación con la resolución que están analizando. Sus intervenciones consisten en proponer problemas o preguntas; repetir o reformular algo dicho por un alumno para hacerlo audible o comprensible para, todos; repreguntar en el caso de que esto no surja del mismo grupo; recordar cuestiones que hayan surgido en momentos previos de la clase; hacer síntesis parciales o de cierre (momentáneo) de lo que se haya dicho o avanzado en la discusión, etcétera.

Como mencionamos, esta clase era una primera aproximación a uno de los problemas aditivos, consistente en establecer la relación cuantitativa entre dos medidas, con el objetivo de comenzar a instalar este tipo de intercambios entre toda la clase. Por lo tanto, sólo se pretendía abrir el juego para que los alumnos pudieran poner en práctica sus propios procedimientos. Se avanzó un poco también en la explicitación, justificación y análisis de esos procedimientos.

¿Cómo continuar a partir de aquí el trabajo con estos problemas? Se vuelven a proponer problemas similares y otros del campo aditivo, para darles la ocasión de reutilizar los avances producidos gracias a las reflexiones que tuvieron lugar en la discusión. Una posibilidad para conducir a los alumnos hacia la utilización de procedimientos numéricos es, en futuras ocasiones, sugerirles de entrada que intenten una solución usando números. También será necesario proponer la misma estructura con números mayores y distantes entre sí para desalentar la utilización del conteo tratando de establecer relaciones con el cálculo.

## **5.2. Segunda situación: resolución de otros problemas aditivos**

### **Contexto didáctico**

La segunda situación que presentamos también se desarrolla en un segundo año pero, a diferencia de la anterior, los alumnos ya están transitando esta modalidad de trabajo desde el inicio de su escolaridad. La maestra propone a sus alumnos resolver individualmente el siguiente problema:

*En esta caja ya hay cubos. Pongo 12 más. Ahora hay 25, ¿cuántos había al principio?*

Es otro de los problemas que corresponde al amplio campo de los problemas aditivos. Involucra una transformación que vincula un estado inicial con un estado final.<sup>10</sup> Aquí se trata de averiguar el estado inicial. Convencionalmente se resuelve restando al total de cubos (25), los que se agregaron (12) para saber cuántos cubos había inicialmente en la caja. Sin embargo, la maestra no les adelanta ni espera que todos sus alumnos efectúen una resta; sabe que, desplegando procedimientos propios, ellos cuentan con posibilidades de resolverlo. Para este grupo de alumnos no es una novedad trabajar de esta manera, están acostumbrados a que se acepten distintos modos de resolución del mismo problema y que puedan probar, ensayar, hacer

---

<sup>10</sup> Esta caracterización del problema corresponde a la clasificación de problemas aditivos de Gérard Vergnaud (1991). También podrá encontrarse una referencia a ella en Broitman (1999).

borradores y también equivocarse.

Los procedimientos de resolución numérica no convencionales posibles para resolver este tipo de problemas son: a través de la búsqueda del *complemento*,<sup>11</sup> es decir, ir añadiendo a la cantidad que se agrega más elementos hasta alcanzar el total, o tanteando con un *estado inicial hipotético*, es decir, anticipando un número posible e ir controlando si, sumado a la cantidad que se agrega, se obtiene la cantidad total de cubos. Los chicos de este grupo, aunque sería una estrategia de resolución posible, no utilizaron aquí el dibujo.

Cuando algunos de ellos preguntan cómo se hace, la maestra responde que lo pueden resolver como cada uno lo piense, pero que es importante que anoten en el papel cómo lo hacen. Pedirles que anoten, es decir, que realicen una producción escrita, es importante por varias razones, entre ellas porque contribuye a organizar las ideas y también porque las ideas escritas perduran y, si la resolución les ha llevado mucho tiempo, puede posponerse la discusión para otro momento.

### ***Desarrollo de la situación***

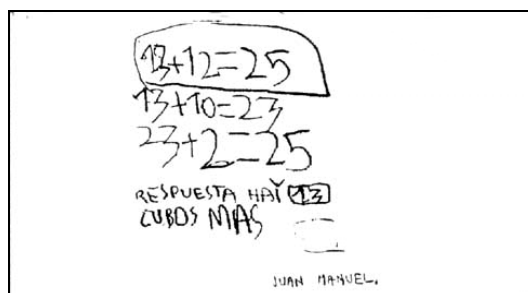
Como lo mencionamos en la situación anterior, mientras los chicos resuelven el problema, la maestra pasa por sus bancos observando qué es lo que hacen. De esta manera, tiene una idea aproximada de los diferentes procedimientos empleados. ¿Por qué es aconsejable que la maestra conozca previamente los procedimientos de sus alumnos? Porque es en función de la producción de ellos que se intentará hacer evolucionar sus conocimientos hacia los contenidos que se quieren enseñar. Por otro lado, reiteramos, se seleccionarán los procedimientos a discutir de acuerdo con los aspectos que el docente desee trabajar. No se trata de que pasen al frente todos los alumnos convirtiendo los momentos de discusión en una tarea de presentación exhaustiva de procedimientos, como simple rutina, en los que los chicos estén más interesados en pasar que en comprender, defender, argumentar y discutir. Un cierto entrenamiento en este tipo de intercambio tal vez evite oír en las aulas: "Pero señor, yo no pasé". Otra alternativa es que la maestra recoja las producciones, las analice y decida cuáles van a ser discutidas por el grupo. De esta manera, podría favorecerse la "despersonalización" de la producción centrando la discusión en los procedimientos.

Una vez que la mayoría lo resolvió, la maestra propone analizar las maneras que encontraron de solucionarlo, para ello invita a pasar al frente a algunos chicos y también -como lo veremos más adelante- propone ella misma resoluciones de algunos niños para ser analizadas. Su objetivo es la difusión de diferentes procedimientos de resolución, inclusive la resta, si apareciera como un procedimiento más.

A continuación mostraremos las producciones seleccionadas por la docente.<sup>12</sup>

### ***Producciones de los alumnos***

Juan Manuel -como se puede observar en la ilustración- había escrito en su papel una suma y el desarrollo para obtener el resultado, pero no daba cuenta de la manera en que encontró el primero de los términos de la suma, justamente el que constituye la respuesta al problema, y esto resultaba interesante.



<sup>11</sup> Se puede lograr a través del conteo, si las cantidades lo permiten, o realizando sumas parciales.

<sup>12</sup> Creemos importante señalar, para comprender las producciones de los niños que presentaremos, que no se les había enseñado el algoritmo convencional, es decir que utilizaban procedimientos numéricos propios basados en la descomposición decimal de los números para resolver las operaciones.

También Flor desplegó una producción similar a la de Juan Manuel, sólo que ella explica cómo es que obtuvo el 13. En su hoja podemos leer:

$13 + 12 = 25$   
 FUI INTENTANDO  
 CON CADA  
 NUMERO  
 Y CON EL 13 SE  
 $10 + 10 = 20$   
 $2 + 3 = 5$   
 $20 + 5 = 25$   
 Respuesta: HABIA 13

Lo interesante era contrastar estas producciones porque, a pesar de que ambos emplean una suma con los mismos términos, no son iguales: Flor explicita cómo llegó al número 13.

Otros chicos también sumaron. La producción de Morena así lo testimonia:

$12 + 10 = 22$   
 $22 + 3 = 25$   
 M  
 O  
 R  
 E  
 N  
 A  
 AL PRINCIPIO HABIA  
 13 CUBOS

Obsérvese que 13 es el resultado que Morena obtiene al ir aproximándose a 25 (número total de cubos) desde 12 (los cubos que se agregan) mediante sumas parciales. Es decir, para llegar a los cubos que ya había en la caja, Morena agrega primero 10 y luego 3, obteniendo por complemento el resultado esperado.

La maestra también sabía que otros chicos habían empleado sumas, pero lo que sumaban eran las dos cantidades que figuran, en el enunciado del problema, realizando obviamente un procedimiento equivocado. Decide entonces que sería muy apropiado analizar con sus alumnos ambos tipos de sumas. Decide también que será ella quien presente estas últimas para no identificar al autor. Finalmente, someterá a la discusión grupal producciones como las de Juan Ignacio y Guido, en las que figura una resta.

$25 - 12 = 13$   
 $25 - 10 = 15$   
 $15 - 2 = 13$   
 RESPUESTA  
 HABIAN 13 CUBOS  
 JUAN IGNACIO

Como podemos observar en esta producción, su autor comienza escribiendo la operación a realizar que desarrolla abajo a través de restas parciales basadas en la descomposición decimal del sustraendo.

Transcribiremos a continuación fragmentos del registro de la clase.

M.: *Bueno chicos, ahora vamos a ver las distintas maneras que encontraron de resolver el problema. Yo iba mirando cuando lo resolvían y me parece que es interesante que las compartamos. A ver Juan Manuel (J. M.), ¿querés contarnos cómo lo resolviste vos?*

Juan Manuel pasa al frente y copia en el pizarrón sólo el cálculo que tenía escrito en su papel.

M.: *Bueno, pero, ¿cuántos cubos había en la caja?*

J. M.: *Trece, pero no anoté la respuesta aquí. (Señala el pizarrón.)*

Muchos chicos dicen que está bien, que antes había trece cubos.

M.: *Pero yo no entiendo cómo hizo Juan Manuel para saber que eran trece.*

J. M.: *¡¡Porque trece más doce es veinticinco!!*

M.: *De acuerdo, ¿pero cómo sabías que había que sumar trece?*

J. M.: *Ya lo dije...*

M.: *A ver miren lo que hizo Flor (Anota en el pizarrón el cálculo que había hecho Flor en su papel.) Ella también hizo trece más doce, pero aclara algo más, ¿querés leerlo Flor o contarnos de dónde sacaste el trece?*

Flor: *Yo hice igual que Juan Manuel.*

M.: *Sí, ¿pero cómo hiciste para saber que era trece lo que le tenías que sumar?*

Flor: *Porque fui pensando con otros números...*

J. M.: *¡Ah! Yo también, yo sabía que era un número de los diez, porque si no me iba a pasar de veinticinco. Primero probé con el diecisiete y me dio otro número, después con el quince y me dio otro número y después me di cuenta de que podía ser con trece.*

Lucas: *Yo también lo pensé así, fui probando...*

M.: *¿Y prueban con cualquier número?*

Hablan varios chicos a la vez, dicen que no es cualquier número, que "te tenés que ir fijando más o menos cuál puede ser".

M.: *A ver, Morena, ¿podrías contarnos cómo lo hiciste vos?*

Morena: *Yo no probé, yo fui agregando... porque yo sé que hasta el veinte, le tenía que agregar diez, ¿no? Y bueno... le agregué y me dio veintidós y ahí ya me di cuenta de que me faltaban tres. Yo no probé, fui poniendo.*

M.: *¿Qué les parece a los demás?*

Muchos chicos dicen que está bien, que Morena fue agregando "de a Poco" el número que le tenía que sumar para llegar a veinticinco.

M.: *Otros chicos también hicieron una suma. Miren, voy a anotar en el pizarrón lo que hicieron para ver qué les parece.*

Anota la producción de una nena que suma  $12 + 25$  y el desarrollo de la descomposición decimal que realiza para obtener el resultado:

$$20 + 10 = 30$$

$$30 + 2 + 5 = 37$$

Guido: *¡¡Pero tiene más de los que dice [el problema] que tiene!!*

Morena: *Si querés sumar podés sumar, pero no todos... así tenés más de veinticinco...*

J. M.: *El número que le sumás lo tenés que pensar*

M.: *¿Qué habrá pensado el que lo hizo así?*

Guido: *Que tenía doce y le agregan veinticinco, pero eso no dice...*

M.: *A ver, ¿qué dice el problema?*

Varios chicos afirman que el problema dice cuántos tenés al final, que no hay que sumar esos números, que hay que sumar los que uno piensa que ya hay en la caja.

M.: *Ustedes dicen que ya sabemos cuántos tenemos después de agregar doce, tenemos veinticinco, o sea, que hay que buscar cuántos había al principio. Algunos chicos pensaron un número y probaban si al sumarlo a doce daba veinticinco, otros fueron agregando desde doce hasta llegar a veinticinco y ahí se daban cuenta de cuántos agregaron.*

Morena: *Sí, yo lo hice así.*



M.: *Sí, se puede pensar algún número y probar si nos puede acercar al resultado o ir agregando poco a poco, como hizo Morena, para llegar a veinticinco. Lo que vemos es que no se pueden sumar los dos números que dice el problema porque no se puso en la caja primero doce y después veinticinco.*

J. M.: *Se puede, pero ése es otro problema...*

M.: *De acuerdo, pero en éste no. Pero otros chicos hicieron una resta, miren chicos, así lo hicieron Juan Ignacio y Guido. (Escribe en el pizarrón la resta  $25 - 12$  y el desarrollo para obtener el resultado.)*

Morena: *¿Es de menos?*

M.: *¿Querés decirnos, Guido, por qué hiciste una resta?*

Guido: *Como le puse cubos, no le podía seguir poniendo cubos. Para saber cuánto tenía antes, le tenía que sacar cubos como los que le puse porque si le agregaba cubos me iba a dar cada vez un total más grande de veinticinco.*

M.: *Él le sacó a los cubos que había en total, los cubos que le agregó para saber cuántos cubos había en un principio. (Algunos chicos dan la impresión de no seguir esta última explicación, otros se asombran de que se pueda resolver con una resta.) Entonces, este problema se puede resolver como lo hicieron Flor, Juan Manuel o Morena que fueron agregando poco a poco o probando con números distintos, o corzo lo que hicieron los chicos que restaron.*

Analizamos este fragmento. Una primera cuestión, que en realidad constituye una condición didáctica necesaria ya mencionada en el ejemplo anterior, es que la maestra no aclare ni dé ninguna pista acerca del tipo de cálculo que resuelve este problema. En efecto, a diferencia de lo que habitualmente se cree, si así lo hiciera no estaría ayudando a sus alumnos. En otra situación similar, una vez planteado el problema y antes de la resolución, uno de los chicos dijo que "era de menos", afirmación que la maestra ratificó. La mayoría de los chicos resolvió el problema empleando una resta, aunque luego no pudieron justificarla. A veces no se trata de que el docente dé directamente la información; en efecto, validar de entrada el procedimiento que uno de sus alumnos sugiere en voz alta funciona como una pista de lo que el docente espera que hagan todos. Evitar dar estas "pistas" es una condición para todas las situaciones en que se quiera que los alumnos desplieguen procedimientos de resolución propios, desarrollen modos de pensamiento acordes con los problemas planteados y en las que realmente cobren sentido los momentos de discusión.

Veamos ahora las intervenciones del docente en este momento, aunque rescatamos que pueden ser válidas para otras situaciones.

- Expone o hace exponer algunas de las producciones de los alumnos sin realizar una presentación exhaustiva de todas. En principio, porque no se encuentran tantos procedimientos diferentes; como acabamos de ver, es posible agruparlos ya que algunos son semejantes. De esta manera, focaliza la atención de los alumnos sobre los aspectos que intenta trabajar y ubica las diferentes soluciones dentro de su especificidad.
- Presenta los procedimientos "buenos", los pertinentes para solucionar el problema y también los que no lo son, sin por ello convertir esta situación en un momento de corrección.<sup>13</sup> No señala los equivocados como tales, sino que propone analizarlos y descubrir cómo lo habrán pensado sus autores. De esta manera, permitirá a sus autores modificar su punto de vista. Los "otros" brindan informaciones que pueden ayudar a elaborar una respuesta nueva y desechar las erróneas. Como veremos más adelante, el análisis de errores no está destinado a beneficiar sólo a quienes los produjeron sino a toda la clase.
- Reformula y hace síntesis parciales de lo que los alumnos van diciendo, para hacerlo comprensible para todos y, al mismo tiempo, centrar la discusión.
- En esta presentación tampoco señala algún procedimiento como "el mejor" o el "convencional". Ése no es el objetivo: comparar no es aquí sinónimo de elegir el mejor, sino la oportunidad de saber que es posible que existan otras respuestas diferentes de la propia y analizarlas.
- Pregunta cómo es que lo hicieron, ayudando de esta manera a tomar conciencia de lo que pensaron. Notemos que, en el inicio del registro, Juan Manuel afirma que sumó 13 porque si lo suma a 12 da 25. A

---

<sup>13</sup> Nos interesa diferenciar claramente estos momentos de discusión de los de corrección colectiva de la tarea. Aquí se trata de profundizar en el análisis de los conocimientos puestos en juego en las resoluciones

pesar de la reiteración de la pregunta por parte de su maestra, su justificación no da cuenta de lo que pensó para llegar a obtener el 13. Es recién cuando otra compañera, indicada por la maestra, explica el procedimiento que consiste en ir intentando con distintos números<sup>14</sup> que él puede retomar su procedimiento y justificarlo no sólo porque "la cuenta da". Para ello es fundamental que la maestra no cierre la posibilidad de continuar la discusión convalidando afirmaciones correctas de los alumnos, sino que también las ponga en duda. La maestra interviene para favorecer la toma de conciencia acerca de lo realizado, ya que en el momento de resolución prima "el hacer" y en los momentos de discusión se intenta volver explícitas "las razones del hacer".

Otra intervención posible es la de ofrecer escrituras a los procedimientos que relatan los alumnos cuando no han llegado a producirlos ellos mismos. Por ejemplo, cuando Juan Manuel relata cómo fue tanteando hasta llegar al número buscado, la maestra podría haber escrito los cálculos correspondientes en el pizarrón sirviendo de apoyatura para lo que sigue de la discusión.

### 5.3. Tercera situación: resolviendo un problema de división<sup>15</sup>

#### Contexto didáctico

Este ejemplo corresponde a una clase de tercer año de la EGB. La maestra está trabajando problemas de división. Su objetivo es hacer evolucionar los procedimientos de los alumnos en dirección al algoritmo de esta operación. Dentro de la variedad de problemas multiplicativos,<sup>16</sup> elige el siguiente para esta clase:

Una panadería fabrica 180 tortas por día y las entrega a cada una de sus 15 sucursales de modo que todas reciban la misma cantidad de tortas. ¿Cuántas tortas llegan a cada sucursal?

Este problema se resuelve canónicamente con la operación  $180 : 15$ . Sin embargo, los alumnos, antes de conocer o dominar el algoritmo que permite resolver este cálculo, pueden recurrir a diversos caminos posibles:

- Mediante representaciones gráficas. Pueden representar la colección de 180 tortas y las 15 partes en las que las distribuirán y señalar con flechas, o sólo representar las 15 partes y allí colocar marcas representando las tortas. En ambos casos, cabe la posibilidad de distribuir de a una o varias tortas por vez. La cantidad a distribuir hace fatigosa la tarea y difícil la organización gráfica generando muchas posibilidades de "perdersse" o equivocarse en el conteo.
- Otros procedimientos para el mismo problema se basan en cálculos aditivos.
  - Tantear una cantidad para cada parte. Estos tanteos pueden seguir dos orientaciones diferentes.
    - b) Probar con un cociente hipotético y reiterarlo 15 veces: por ejemplo, prueban con 8, "si le diera 8 tortas a cada uno...", suman 15 veces 8, 120. Entonces ajustan el tanteo, probando con un número más alto, por ejemplo 10. Continúan ajustando el tanteo, por ejemplo probando con 15. Allí advierten que "se pasaron" y disminuyen el número hasta alcanzar una cantidad que, sumada 15 veces, les dé 180.
    - b) Composición progresiva del cociente a partir de sucesivas aproximaciones. Por ejemplo: comienzan con 5 que, reiterado 15 veces comprueban que da 75; agregan otros 5 y allí llegan a 150; agregan 2 para distribuir los 30 restantes.
  - También sería posible hacer un camino similar a través de restas reiteradas.
  - Adicionar reiteradamente 15 hasta alcanzar 180 y luego contarla cantidad de veces que se suma 15. Sin embargo, no es un procedimiento mayoritario para esta clase de problemas<sup>17</sup> porque cada uno de

<sup>14</sup> Vergnaud (1979, 1991) denomina a este procedimiento *búsqueda de un estado inicial hipotético*.

<sup>15</sup> Esta clase se desarrolló en el instituto Valle Grande y corresponde a datos de una investigación didáctica acerca de la división desarrollada por María Emilia Quaranta con beca UBACyT, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires.

<sup>16</sup> Ver Documento Curricular N°4 del área de Matemática, Dirección de Currículum, Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

esos 15 representa "una torta por sucursal", mientras que, en el enunciado, el 15 representa "sucursales". Lo mismo puede decirse para la resta reiterada de 15. Para estos procedimientos aditivos también es posible ir haciendo sumas parciales, o utilizar el resultado de la suma de varios sumandos, en el último caso, por ejemplo, de varios 15 (30, 60, etcétera). En cualquiera de los procedimientos que utilizan sumas o restas reiteradas, la respuesta al problema no está dada en el resultado. Y es justamente el control del sentido de los diferentes pasos de su resolución lo que les permite a los alumnos comprender dónde se encuentra la respuesta buscada.

- Otro procedimiento consiste en realizar aproximaciones multiplicativas, buscando un número que, multiplicado por 15, dé 180. Esta aproximación multiplicativa puede realizarse de dos maneras diferentes:

- Tanteando un cociente hipotético y ajustando en función de las comprobaciones sucesivas. Por ejemplo, un alumno que prueba multiplicando por 8, no alcanza a 180, busca entonces un cociente mayor y vuelve a multiplicar, así hasta encontrar el número que dé o se acerque lo más posible a 180.

- Componiendo progresivamente ese cociente a través de multiplicaciones parciales. Por ejemplo, un alumno que hace "8 tortas para cada sucursal, son 120; otras 2, son 30 más; otras dos, 30 más. Entonces son 12 para cada sucursal".

En ambos casos, la multiplicación por diez es un recurso poderoso por la economía que procura. En efecto, en un procedimiento multiplicativo pueden apoyarse en el conocimiento de la «regla de los ceros», partir de  $15 \times 10$ , y continuar desde allí la resolución.

### ***Desarrollo de la situación***

Este análisis corresponde a las anticipaciones en relación con las soluciones posibles al problema que la maestra planteará a sus alumnos. Veamos ahora el desarrollo mismo de la clase. La maestra presenta el problema e indica a sus alumnos que lo lean solos unos instantes. Luego, pregunta si hay algo que no hayan entendido, aclarando que no dirían nada en ese momento acerca de cómo resolverlo o del resultado, que eso lo pensarían solos y después lo conversarían entre todos. Se aclara en particular el significado del término «sucursal». Este instante sólo se dedica a aclarar cuestiones del enunciado, de ninguna manera implica un inicio de resolución conjunta con toda la clase.

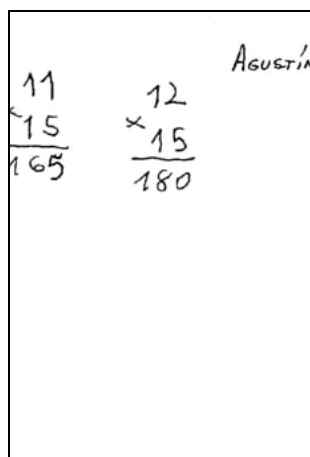
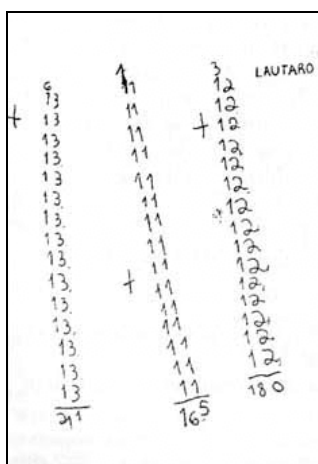
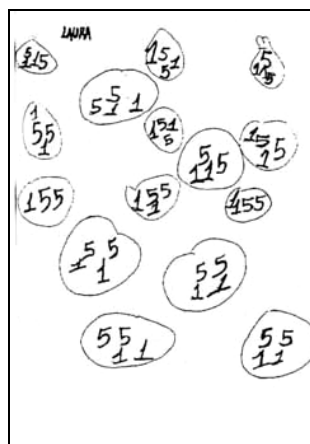
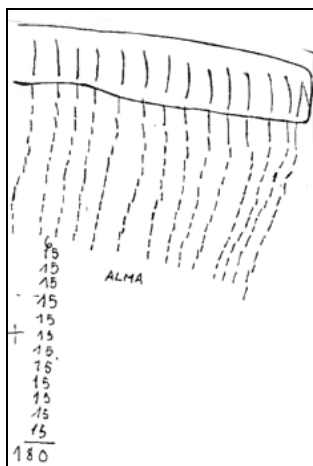
Como en los ejemplos anteriores, la maestra, mientras resuelven, observa los procedimientos que están siendo utilizados y selecciona los que luego se someterán a la discusión. También, en los casos en que resulta necesario, relee y explica el enunciado, aclara dudas, sugiere cómo empezar a hacer algo a aquellos alumnos que permanecen bloqueados. A una alumna, Alma, que había hecho la representación gráfica de la distribución de cada uno de los elementos, le sugiere que intente, para resolverlo más rápido, usar números en lugar del dibujo. A otros alumnos que habían terminado mucho antes que el resto les pidió que buscaran otra manera diferente de resolverlo.

La gran mayoría de las resoluciones fueron aditivas, apareciendo algunas multiplicativas. La maestra decidió centrar el debate en la comparación entre ambos procedimientos. Elige para la discusión los procedimientos de los siguientes alumnos:

- Alma: una representación gráfica y luego una suma reiterada de 15 basada en la organización gráfica inicial.
- Laura: basado en adiciones reiteradas que componen el resultado progresivamente.
- Lautaro: basado en tanteos aditivos.
- Agustín: basado en tanteos multiplicativos.

---

<sup>17</sup> Sí lo es, en cambio, en aquellos problemas donde el valor de cada parte ya está dado. Por ejemplo: "La familia López está ahorrando \$15 por mes para comprarse un televisor que cuesta \$205. ¿Cuántos meses tienen que ahorrar para juntar el dinero que necesitan?".



A continuación, transcribimos la discusión que, por su extensión, debió interrumpirse y continuarse al día siguiente.

M.: *A ver, Alma, yo voy a hacer en el pizarrón lo que vos hiciste en tu hoja. Mientras yo lo hago vos explicáselo a los chicos.* (Transcribe en el pizarrón la distribución gráfica de Alma.)

Alma: *Yo iba haciendo una torta para cada negocio. Después, los conté así* (cuenta una columna de marquitas) *y eran doce.*

M.: *¿ Todos entienden cómo lo pensó Alma?*

Alumnos: *Sí.*

M.: *Bueno, cuando pasé por los bancos vi que Alma estaba muy cansada de tanto hacer palitos y le dije si no habría alguna manera de hacerlo, usando los números, que no le llevara tanto tiempo, y ella hizo esto. ¿ Querés hacerlo, Alma?*

Alma copia en el pizarrón:

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 + 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \quad (12 \text{ veces } 15) \\
 15 \\
 \hline
 \dots \\
 180^{18}
 \end{array}$$

<sup>18</sup> Tal como señalamos en la nota anterior, no es un procedimiento frecuente para esta clase de problemas. Es necesario observar que Alma no lo utiliza inicialmente en su resolución sino después de la resolución gráfica donde, muy probablemente, sea la distribución de las marcas lo que le sugiere esa suma. De hecho, cuando justifica su adición reiterada, muestra cómo cada 15 representa una fila de marcas.

M.: *¿Qué les parece esto que hizo Almi? ¿Servirá para pensar este problema?*  
A.: *Sí, es más rápido que hacer todos los palitos.*  
M.: *Pero yo no entiendo algo, acá (señala la suma), ¿cómo me doy cuenta de la respuesta al problema?*  
Alma: *Acá, ¿ves?, son doce: uno, dos, ..., ..., doce. (Cuenta la cantidad de sumandos.)*  
M.: *¿Doce de qué cosa*  
A.: *Tortas.*  
A.: *Negocios.*  
M.: *¿Tortas o negocios?*  
Algunos alumnos dicen tortas y otros, negocios.  
M.: *Estos ciento ochenta que da el resultado de la suma, ¿qué son?*  
A.: *Tortas, todas las tortas.*  
M.: *¿Y estos quince? (Señala uno de los sumandos.)*  
A.: *Tortas.*  
A.: *¡No! Leé el problema, son quince negocios.*  
M.: *Ah, ¿y por qué será que Alma contó las veces que había sumado quince para saber cuántas tortas le tocaban a cada negocio?*  
Alma: *Este quince es esto (señala una fila de las marcas distribuidas), son doce de éstas.*  
Agustín: *Cada quince quiere decir que le dio ruca torta a cada negocio, ¿ves? (Se para y señala sobre la fila señalada por Alma.)*  
M.: *Y eso, ¿tendrá algo que ver con lo que yo había preguntado?*  
Fede: *No me acuerdo qué habías preguntado.*  
M.: *¿Porqué Alma había buscado la cantidad de tortas que le tocaban a cada negocio contando la cantidad de veces que sumaba quince?*  
Agustín: (Enojado.) *¡Claro! ¿No te digo que en cada quince hay "una " para cada negocio, si hay doce veces quince, hay doce para cada negocio?*  
M.: *¿Entienden lo que está diciendo Agustín?*  
A.: *No.*  
M.: *Él dice que cada uno de estos quince que Alma puso acá, quiere decir una torta para cada negocio, entonces una, dos, tres... doce tortas para cada negocio. (Señala cada uno de los "15" escritos en el pizarrón.)*  
Algunos alumnos siguen con expresión de no comprender.  
M.: *Bueno, ahora Laura nos va a mostrar cómo lo pensó ella. Pero Laura, ¿te animás a hacerlo en el mismo orden en que lo fuiste haciendo en tu hoja para que los chicos vean bien cómo lo fuiste pensando?*  
Laura: (Dibuja los 15 círculos y luego va anotando dentro de cada uno primero un 5; luego otro 5; luego un 1; y, finalmente, otro 1.) *Primero probé con cinco a cada y era muy poquito, después probé cinco más, eran diez para cada negocio: diez, veinte, treinta (mientras va señalando sobre cada círculo)... ciento cincuenta. Me faltaba, uno más a cada uno eran ciento cincuenta y uno, ciento cincuenta y dos,.... ciento sesenta cinco. Uno más a cada uno: ciento sesenta y seis, ciento sesenta y siete,...., ciento ochenta. Entonces, para cada negocio, cinco, diez, once, doce tortas.*  
M.: *¿Entendieron todos cómo lo hizo Laura?*  
A.: *Sí.*  
M.: *¿Dónde dice la cantidad de tortas que le tocan a cada sucursal?*  
Marisol: *Adentro de cada globito: cinco, diez, doce.*  
M.: *¿Y dónde están acá las quince sucursales?*  
Marisol: *Los quince globitos.*  
Leo: *¿Pero no era más rápido si hacía doce más doce, más doce... ?*  
M.: *¿Y por qué creen que no habrá hecho de entrada doce más doce... ?*  
*¿ Cuántas veces tendría que haber sumado doce?*  
Andrés: (Cuenta sobre el pizarrón la cantidad de círculos.) *Quince.*  
M.: *¿Y por qué creen que de entrada no sumó quince veces doce?*  
Laura: (Enojada.) *¡Yo no sabía que eran doce!*  
M.: *Laura dice que ella, antes de resolver el problema, no sabía que eran doce las tortas para cada sucursal. ¿Alguien lo sabía?*  
Laura: (Sigue enojada.) *¡No! ¡Si es lo que pregunta!*

M.: *Laura dice que nadie lo sabía porque justamente es lo que nos piden que averigüemos en el problema. ¿Están todos de acuerdo?*

Los alumnos asienten.

M.: *Bueno, por hoy vamos a dejar aquí y mañana vamos a continuar conversando sobre cómo resolvimos este problema.*

Al día siguiente, antes de iniciar la clase, la maestra copia en el pizarrón los procedimientos que se habían discutido en la clase anterior.

M.: *Bueno, ayer resolvimos este problema (lee el enunciado) y empezamos a conversar sobre diferentes maneras de resolverlo. Habíamos llegado a ver estas dos. ¿Alguien nos cuenta cómo eran?*

Los chicos relatan los dos procedimientos.

M.: *Ahora vamos a ver cómo lo resolvió Lautaro. Lauti, vení y copió cómo lo hiciste.*

Lautaro copia.

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 13 \\ 13 \quad 15 \text{ veces} \\ \dots \\ \hline \end{array}$$

211

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 11 \\ 11 \quad 15 \text{ veces} \\ \dots \\ \hline \end{array}$$

165

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ 12 \quad 15 \text{ veces} \\ \dots \\ \hline \end{array}$$

180

Lautaro: *Primero probé con trece para cada sucursal, me pasé; después con once, eran pocas, entonces tenía que ser doce, y medio.*

M.: *¿Todos entienden lo que hizo Lauti?*

A.: *Sí*

M.: *Se acuerdan de que ayer ustedes se preguntaban por qué acá no se había hecho directamente quince veces doce? (Señala el procedimiento de Laura) Bueno, acá (señala el procedimiento de Lautaro) sí se hizo quince veces doce, ¿eso quiere decir que él ya sabía que eran doce?*

Leo.: *No, porque él fue viendo, trece no era, once tampoco y ahí se avivó de que era doce.*

M.: *Y en esto que hizo aquí Lauti (señala la suma reiterada de “12” en el pizarrón), ¿cómo me doy cuenta de que eran quince sucursales?*

Lautaro.: *Y, porque yo probaba siempre quince veces, doce cada sucursal*

M.: *Miren, Lauti acá sumó doce quince veces, ¿no? ¿Qué tiene de parecido y qué tiene de diferente con lo que hizo Laura?*

A.: *Que Laura no puso directamente doce, probó cinco, después cinco más, diez; después dos más, doce. Y ahí sí le quedó doce.*

M.: *Doce, ¿qué?*

A.: *Tortas para cada negocio.*

M.: *Ah, ¿y tienen algo de parecido?*

A.: *Sí, los dos hicieron con doce, pero llegaron distinto. Laura probó cinco más cinco más uno más uno y Lautaro probó con trece, once y después doce.*

M.: *Bueno, ahora vamos a ver cómo lo hizo Agustín.*

Agustín: *(Pasa al pizarrón.) Yo ya sabía que quince por diez era ciento cincuenta, entonces tenía que ser un poquito más, hice once por quince y me dio ciento sesenta y cinco, entonces era un poquito más, doce.*

M.: *Hacelo en el pizarrón.*

Agustín escribe:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 15 \\ \hline 165 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times 15 \\ \hline 180 \end{array}$$

Agustín: *Era doce, porque doce por quince es ciento ochenta.*

M.: *¿Cómo hiciste para saber cuánto era once por quince o doce por quince?*

Agustín: *Porque once eran quince más que ciento cincuenta; y doce, quince más.*

M.: *Agustín dice que él ya sabía que diez por quince era ciento cincuenta (anota 150 en el pizarrón), entonces once por quince eran quince más (anota en el pizarrón  $150 + 15 = 165$  y  $165 + 15 = 180$ ).*

*¿Entienden cómo hizo Agustín estas cuentas?*

A.: *Sí.*

M.: *Ahora, yo me pregunto, ¿qué tienen de parecido y qué tienen de diferente lo que hicieron Agustín y Lautaro? Agustina: Uno hizo de por y otro de más.*

M.: *Agustina dice que uno hizo una multiplicación y el otro una suma.*

*Ustedes, ¿qué piensan?*

A.: *Que sí.*

M.: *Ah, ¿y encuentran algo de parecido?*

A.: *No.*

A.: *Que en los dos está el doce, y el once. (Se refiere a los resultados posibles que fueron tanteando.)*

A.: *Pero no está el trece.*

Agustín: *Porque estábamos probando. Yo no probé con el trece.*

M.: *Ah, y en la suma de Lauti no aparece el quince.*

Laura: *No, porque está en las quince veces que puso el doce.*

M.: *Laura dice que el número quince no aparece, pero está en las quince veces que aparece acá el doce. ¿Están todos de acuerdo? Varios alumnos: Sí.*

M.: *Y, ¿por qué será que el doce acá aparece una sola vez (señala la multiplicación) y acá tantas (señala la suma reiterada)?*

Laura: *Porque el quince en la cuenta de por quiere decir que se repite quince veces. En la suma el número está quince veces.*

M.: *Laura dice que en la multiplicación basta poner una sola vez el número porque el otro número me dice cuántas veces se repite. ¿Es así? Varios alumnos dicen que sí.*

M.: *Y acá (señala la suma), ¿me puedo dar cuenta de un vistazo, así rápido, cuántas veces se repite el número doce?*

Leo: *No, tenés que contarlos.*

M.: *Claro, Leo dice que hay que contarlos. Y acá, en la multiplicación, ¿me puedo dar cuenta rápido, de un vistazo, cuántas veces se repite el número doce?*

Leo: *Quince.*

Johnny: *¡Qué viva! Ahí tenés el quince.*

M.: *Y estas sumas que están acá (señala el procedimiento de Lautaro), ¿podría haberlas pensado con otra operación que fuera más corta?*

Laura: *Y sí, como ésa. (Señala el procedimiento de Agustín.) Trece por quince, once por quince, doce por quince.*

M.: *Laura dice que estas sumas yo las podría haber hecho con una multiplicación, ¿están de acuerdo?*

Muchos alumnos responden afirmativamente.

M: *Bueno, chicos, vimos todas estas diferentes maneras de resolver este problema Y también que la multiplicación a veces nos sirve para resolver de una manera más corta algunas sumas. ¿Cuándo?*<sup>19</sup>

A: *Cuando los números que sumás son los mismos.*

M.: *Bueno, vamos a anotar todo esto que aprendimos en las carpetas.*

En esta extensa discusión vemos a la maestra desplegar intervenciones muy variadas. Por un lado, y como en los ejemplos anteriores, pide a los alumnos que expliciten sus procedimientos. Esto lleva no sólo a que los autores presenten los suyos sino también a que el resto de los alumnos pueda considerar procedimientos diferentes de los propios, es decir, descentrarse de la solución que ellos mismos habían pensado y concebir otras posibles. Eventualmente, también, podrán apropiarse de modos de resolución diferentes de los que ellos pudieron desarrollar hasta el momento. Durante la exposición, la maestra pregunta por el significado de los diferentes números, para ir trabajando sobre el control del sentido de los diferentes pasos de la resolución por parte de toda la clase y no sólo del autor del procedimiento.

A medida que los procedimientos iban siendo expuestos, se comparaban entre sí. La comparación no se centró, en este caso, tanto en la economía y fiabilidad de los procedimientos sino en poder interpretar un procedimiento en términos del otro. Es decir, en buscar cómo estaban los elementos y las relaciones del problema formulados en uno y en otro. No queremos decir con esto que, en otros casos, no sea crucial para el avance de los procedimientos la comparación en términos de los criterios de confiabilidad y economía, sólo que no era el objetivo de este intercambio.

Vemos cómo la maestra muchas veces reitera lo que dijo algún alumno para que toda la clase pueda tomarlo, o lo reformula para hacerlo comprensible. En otras ocasiones cuestiona, repregunta, recuerda cosas que fueron dichas antes y las contrasta con otras que dicen ahora. También, contrargumenta algunas de las afirmaciones. Otra intervención de la docente consiste en ofrecer la escritura aritmética de lo que dicen los alumnos, para ofrecer herramientas que colaboren en la objetivación de los conocimientos. Por último, cierra con una conclusión sobre los aspectos principales que fueron discutidos y que considera necesario que los alumnos reconozcan como conocimientos a los que se les otorga un status oficial y que podrán -y deberán- ser reutilizados en las situaciones donde sean pertinentes.

Las observaciones que hacemos aquí corresponden simplemente a un análisis del mismo docente a posteriori del desarrollo de su clase, de manera tal de poder ver en qué medida se acerca o se aleja de sus previsiones, viendo cuáles fueron las intervenciones más pertinentes, cuáles no, qué otras hubieran sido posibles, a los fines de poder ajustar lo previsto para futuros desarrollos de esta y otras clases.

#### **5.4. Cuarta situación: encontrar diferentes maneras de resolver una suma**

##### **Contexto didáctico**

Se les propone a los alumnos de primer año de la EGB la tarea de encontrar y "anotar" todas las maneras posibles de resolver un cálculo,  $55 + 36$ . El objetivo del momento de discusión es poner en común algunas de las distintas resoluciones y analizarlas enfocando especialmente la comparación entre los diferentes procedimientos. El abanico de los procedimientos abarcaba algunos que presentaban la descomposición decimal de los dos sumandos; otros, más económicos por cierto, la descomposición de sólo uno de los términos; otro procedimiento, más económico aún, consistía en considerar la suma de las decenas, como si fueran unidades pero sin perder de vista que correspondían a las decenas.<sup>20</sup>

---

<sup>19</sup> Cabe aclarar que la multiplicación es una operación diferente de la suma, pero equivalente a una suma de sumandos iguales. Una multiplicación *no es igual* a una suma reiterada, sólo son equivalentes en tanto permiten alcanzar el mismo resultado.

<sup>20</sup> El fragmento de clase que presentaremos corresponde a un registro de clase realizado en la escuela Numen, y forma parte de los datos recogidos en una investigación didáctica llevada a cabo por Susana Wolman. Los alumnos trabajan resolviendo operaciones sin que se les hubiera enseñado previamente el algoritmo convencional de la suma. Esta investigación comienza en el mes de agosto, cuando los chicos ya saben resolver cuentas de las llamadas "sin dificultad". Se les plantea situaciones problemáticas que se resuelven con sumas que convencionalmente requieren el agrupamiento, pero frente a las cuales los alumnos despliegan procedimientos numéricos no convencionales. Este registro corresponde al mes de noviembre.



## Desarrollo de la situación

Una vez realizada la tarea, la maestra recoge las hojas de los niños y analiza las producciones. Al comenzar la puesta en común ya había decidido cuáles procedimientos se iban a someter a la discusión grupal.

Al comenzar la clase, la maestra invita a Gabriel a escribir en el pizarrón el procedimiento previamente seleccionado.

Gabriel: (Anota en el pizarrón)

$$55 + 36 = 91$$

$$50 + 30 = 80$$

$$80 + 6 = 86$$

$$86 + 5 = 91$$

M.: *Fíjense si entienden lo que hizo Gabriel.*

Gabriel: (Antes de que alguien pudiera decir algo.) *Yo primero hice cincuenta más treinta, que es ochenta.* (Señala en el pizarrón.)

M.: *¿Cómo lo sabés?*

Gabriel: *Hice cinco más tres, ocho. No, yo ya sabía que cinco más tres es ocho, entonces, cincuenta más treinta es ochenta.*<sup>21</sup>

M.: *Decime, si fuera treinta más cuarenta, ¿también lo harías así?*

Gabriel: *Sí, es setenta, tres más cuatro es siete... Bueno, aquí* (se refiere a lo que escribió en el pizarrón) *después, le agregué seis.*

Guillermo: *¿Por qué seis y no sesenta?*<sup>22</sup>

Gabriel: *Porque está atrás de los números que tienen diez. Los que están atrás son números comunes y corrientes.*

Brian: *El tres sólo vale como tres unos, pero el tres del treinta, como tres diez.*<sup>23</sup>

Gabriel: (Continúa con su explicación.) *Bueno, y al final el cinco del cincuenta y cinco. En el cincuenta y cinco, uno* (de los cincos) *vale cinco dieces y el otro cinco unos.*

Pasa luego Facundo, y la maestra le señala cuál de todos los procedimientos que tiene en su hoja tiene que copiar en el pizarrón.

Facundo: (Anota en el pizarrón.)

$$55 + 10 = 65$$

$$65 + 10 = 75$$

$$75 + 10 = 85$$

$$85 + 6 = 91$$

M.: *¿Entienden lo que hizo?*

Guillermo: *Sí, pero el diez, ¿de dónde lo sacaste?*

Facundo: *Del treinta y seis.*

Denise: *Pero, ¿cómo sabías que tenías que poner ese diez?*

Facundo: *Porque lo saqué del treinta y seis, los tres diez* (los señala en su procedimiento).

M.: *Bueno, ¿en qué se parecen o no se parecen estas cuentas?*

Julieta R.: *La más larga es la de Facu, porque tiene cuatro y la de Gabriel tiene tres* (se refiere a los cálculos parciales).

Nicole: *Porque Gabriel no desarma.* (Se refiere a desarmar de a diez algún término de la suma.)

<sup>21</sup> Gabriel utiliza el último de los procedimientos mencionados. Para profundizar al respecto, véase Lerner, Sadovsky y Wolman (1994).

<sup>22</sup> Guillermo formula una pregunta muy utilizada por la maestra en clases anteriores. El objetivo de éstas es ayudar a la consideración del valor posicional. Como veremos en lo que continúa, varios alumnos imitan el tipo de preguntas que ella formula con la idea de ayudar a la justificación de los números considerados.

<sup>23</sup> Esta respuesta, que alude al valor multiplicativo de la cifra de las decenas, no es habitualmente dominada por los chicos de primer año de la EGB. Saber que el treinta y seis se forma con tres de diez y un seis no es equivalente a saber que es el tres de treinta y seis la cifra que representa tres grupos de diez.

Julieta R.: *Facu y Gabriel desarenan, Facu el treinta y seis lo desarma por diez.*

M.: *A ver, ¿cómo es eso de que desarma por diez?*

Denise: *¡Claro! ¡Se pueden desarmar de las dos maneras! Gabriel separa el cincuenta y cinco y el treinta y seis... pero no... lo... lo... La más larga es la más fácil porque va desarmando los treinta en los dieces.*

Facundo: *Claro, es más fácil porque de... de... cincuenta y cinco si tenés diez más, sabés que el de adelante cambia y el otro queda igual.*

M.: *¿Y lo que hizo Gabriel?*

Facundo: (Mirando el pizarrón.) *También es fácil... ¿no?*

Brian: *Sí, es fácil, cincuenta más treinta es ochenta.*

La maestra invita a pasar a Franco y le señala cuál es el procedimiento que quiere que escriba.

Franco: (Anota lo siguiente en el pizarrón.)

$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$$

$$10 + 10 + 10 = 30$$

$$80 + 5 + 6 = 91$$

M.: *A ver, ¿cómo es eso?*

Franco: *Diez más diez, veinte; treinta, cuarenta y cincuenta (y continuando con los de abajo) sesenta, setenta y ochenta. Pongo el ochenta y más cinco y más seis es noventa y uno.*

Gabriel: *¡Pero está mal escrito! Los diez de abajo forman treinta, no ochenta. ¡Vos los ponés mal!*

Franco: *¡No, nene! Está bien, los de arriba son los del cincuenta y los de abajo, los del treinta.*

En el fragor de la discusión Gabriel y otros chicos se van acercando al pizarrón para tratar de convencer a Franco de que así no se entiende.

M.: *Bueno, vuelvan todos a sus lugares, que así no se entiende nada. A ver, Brian, ¿qué estabas diciendo?*

Brian: *Fijate, ¿no ves que te queda diez, veinte, treinta y vos le ponés ochenta? (A medida que habla se va acercando nuevamente al pizarrón.) Le tenés que volver a poner el cincuenta adelante, acá abajo (señala en el pizarrón), antes de los diez.*

Franco: (Exaltado.) *Pero, ¿no ven que viene desde arriba, que ya tengo cincuenta? Abajo, acá (señala el lugar marcado por sus compañeros) no puse el cincuenta, porque yo ya sabía que tenía cincuenta.*

Julieta: *Pero algunos no saben...*

Franco: (Irritado.) *Pero como yo los tenía, yo ya sabía...*

Guillermo: *Sí, pero lo que vos decís no se entiende; tres diez, no son ochenta, dan treinta.*

Franco: *No, porque yo lo tengo en la mente.*

Santiago: *Cuando lo decís está bien, pero cuando lo anotás está mal.*

M.: *Bueno, parece que tenemos un problema con cómo se escriben los cálculos que pensamos. Franco dice que el cincuenta lo tiene en la mente, pero de verdad, aquí (señala la suma de los tres diez), como dicen muchos de ustedes, el resultado no da ochenta, sino treinta. Si se piensa que lo de arriba continúa abajo, estarnos de acuerdo, pero no alcanza con tenerlo en la mente, hay que escribirlo para que todos lo entiendan.*

Franco: *Está bien, pero yo lo entiendo... (La puesta en común continúa.)*

Analicemos ahora las intervenciones docentes que nos muestra este fragmento:

- La tarea implicaba la búsqueda de diferentes procedimientos para el mismo cálculo. La producción de los chicos fue numerosa pero la maestra elige previamente algunos de los procedimientos. El repertorio que se presentaba iba a permitirle intentar que todos los alumnos tomaran contacto con procedimientos que ya empleaba la mayoría como con otros que sólo dominaban unos pocos. Nos referimos específicamente al procedimiento -bien avanzado, por cierto- de Gabriel. Casi todos recurrieron a procedimientos basados en la descomposición aditiva de los números. Sin embargo, se considera importante que tomen contacto con otros que superan esta posibilidad, porque están basados en el reconocimiento del valor de las cifras de un número como producto de la multiplicación por la potencia de la base. Este hacer público un procedimiento muy avanzado no implica que todos se apropien de él pero sí que tomen conocimiento de su existencia e intenten comprenderlo. Parece ser así, por lo

menos para algunos de los chicos, ya que al finalizar la clase, Facundo responde, cuando la maestra pregunta si les sirvió: "A mí me sirvió mucho la suma de Gabriel".

- La maestra incita a comparar las producciones: "la más larga es la más fácil", afirman algunos, afirmación que contraría la idea de la economía propia del algoritmo, pero necesaria en la construcción del sentido. "Más fácil", para los alumnos, muchas veces equivale a "más comprensible" o más transparente. En otros momentos, han afirmado que el cálculo más largo es el más difícil -justamente porque es más largo- pero se entiende más. Lo más fácil o lo más difícil, desde el punto de vista de los niños, depende de las posibilidades de comprender las producciones en cuestión.
- Algunas intervenciones de la maestra apuntan a generalizar afirmaciones de los alumnos instalando como problema si ellas se cumplen en otros casos. Por ejemplo, cuando pregunta "si fuera treinta más cuarenta, ¿también lo harías así?".
- Interviene asimismo con respecto a la escritura matemática de los cálculos. Hubiera sido más fácil que la maestra le indicara a Franco la manera correcta de anotar sus cálculos y seguramente él le hubiera obedecido, pero es más importante y efectivo que el autor coteje con sus pares la "legibilidad" de su producción. La maestra avala luego de la discusión. Cuando esto ocurre, se encuentran suficientes motivos para cambiarla, aunque en un principio se intente defenderla acérrimamente, como hace Franco.<sup>24</sup>

## 6. Conclusiones

Nos preguntábamos al iniciar este trabajo qué, para qué y cómo se discute en las clases de Matemática. Retomemos ahora, para finalizar, cada uno de nuestros interrogantes tratando de sintetizar en qué medida hemos podido avanzar sobre ellos a lo largo del capítulo.

### 6.1. *¿Qué se discute en las puestas en común que tienen lugar en las clases de Matemática?*

Ante todo, debemos tener presente que estos momentos son espacios didácticos. Esto es, espacios de enseñanza y de aprendizaje donde interviene un saber específico, y es precisamente en relación con dicho saber que se desarrollan las discusiones. No se trata de conversaciones por el intercambio en sí mismo que podrían tener lugar en otros momentos y con otros objetivos, como mejorar la comunicación o la relación grupal. Tampoco se trata de momentos previos al trabajo didáctico a modo de "motivación", ni necesariamente destinados a la conclusión o cierre de un tema. La interacción grupal, el modo de participar en los intercambios -aprender a respetar la producción propia y la de los otros, escuchar sin interrumpir, respetar turnos, poder revisar la posición propia, etcétera- constituye también un propósito más general de la escuela, sólo que no puede desarrollarse en el vacío sino en relación con contenidos de enseñanza. Estas discusiones son parte constitutiva de los procesos didácticos y se desarrollan siempre en torno a un objeto de conocimiento, apuntando hacia un saber al que queremos que nuestros alumnos se aproximen progresivamente. La organización de estos momentos por parte del docente toma como ejes aspectos de saberes matemáticos propiciando la participación de los alumnos en términos de comunicaciones y argumentaciones en relación con dichos saberes. Tanto la planificación como el desarrollo de las clases cuyos fragmentos presentamos muestran claramente cómo el maestro se centra, a partir de sus análisis previos, en determinados aspectos de los conocimientos matemáticos sobre los que considera necesario trabajar y conduce los intercambios de acuerdo con ellos.

---

<sup>24</sup> Cuando un alumno produce una escritura -correcta o no-, la maestra la somete a la discusión del grupo. Es diferente el caso que mencionábamos en ejemplos anteriores, donde el maestro ofrece escrituras aritméticas que se correspondan con lo que están pensando los niños y no saben cómo anotar.

## 6.2. ¿Para qué incluir espacios de discusión en las clases de Matemática?

Mostramos, por un lado, que las interacciones sociales, bajo ciertas condiciones, generan avances en los conocimientos. Mostramos también, por otro lado, cómo las discusiones favorecen en parte la explicitación, justificación y validación de los conocimientos que los alumnos utilizan en la resolución de problemas, procesos que son constitutivos del sentido de los conocimientos. No estamos queriendo decir que los niveles de formulación o de validación se trabajen sólo a partir de puestas en común. Estos niveles del sentido de los conocimientos pueden requerir de otras situaciones específicas que apunten a ellos. Los momentos de discusión generan condiciones que facilitan el avance hacia la conceptualización de aquellos conocimientos que los alumnos pudieron utilizar en las resoluciones.

*El desarrollo de este momento [de confrontación] obliga a los alumnos, por un lado, a volver sobre sus procesos, sobre sus propias acciones, a describirlas y a defenderlas y a tomar conciencia de los recursos de los que disponen, de su pertinencia y de su validez; pero también a tratar de comprender los procesos de los demás, de sus argumentos y, si es posible, a apropiarse de los procedimientos de sus compañeros, ampliando el campo de sus posibilidades (Saiz, 1995).*

Las discusiones permiten plantear *nuevos problemas* que obliguen a nuestros alumnos a reflexionar sobre lo realizado, a explicitarlo y justificarlo. En consecuencia, si consideramos que en toda resolución de problemas se juega algún nivel de comprensión, menor o mayor, del conocimiento en cuestión, las puestas en común abrirían un espacio para que se progrese en dicha comprensión.

Quisiéramos introducir aquí una aclaración. Nos estamos refiriendo a las discusiones, con las explicitaciones y argumentaciones que estos momentos posibilitan, en tanto medio para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos en los diferentes niveles de la educación inicial y básica. Estas discusiones no siguen necesariamente las reglas del debate matemático,<sup>25</sup> aunque quizás constituyan sus precursores. Arsac *et al.* (1992) desarrollan una serie de situaciones didácticas cuyo objetivo es que los alumnos aprendan esas reglas desde los 11 años.<sup>26</sup> Es decir, se ocupan de las reglas del debate matemático en tanto objeto de enseñanza. Reconocemos la importancia de tomar, como lo hacen estos autores, los procedimientos propios de la demostración matemática como objeto de enseñanza a partir de determinado nivel de la escolaridad. Sin embargo, es necesario aclarar que, en nuestro trabajo, nos estamos refiriendo a las discusiones desde una perspectiva más general, para la enseñanza de todos los conceptos matemáticos y desde los niveles iniciales. En otras palabras, el objetivo de introducir estos espacios en el aula no es, al menos en forma directa, el aprendizaje de las reglas del juego matemático, como lo mencionan los autores citados, sino el aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos. Abordamos el modo como los intercambios y reflexiones producidos en estos momentos son constitutivos del sentido de dichos saberes.

Si bien las discusiones de las que aquí nos ocupamos no siguen los requisitos del debate matemático, sí son momentos donde se movilizan pruebas. Al respecto, Balacheff (1982) distingue entre explicaciones, pruebas y demostraciones. Una explicación es todo discurso que apunta a comunicar el carácter de verdad de un enunciado matemático. Una prueba es una explicación aceptada por otros en un momento dado. Por ello, una explicación puede constituir una prueba para un grupo mientras que no lo es para otro. Finalmente, las demostraciones son pruebas aceptadas por toda la comunidad de matemáticos, donde los enunciados se deducen siguiendo ciertas reglas a partir de unos pocos enunciados considerados verdaderos y, además, se refieren a objetos teóricos. Al desarrollarse con niños más pequeños, estas discusiones respetan ciertas reglas, pero están lejos de las exigencias de una demostración matemática, sobre todo en tanto esta última se apoya en una estructura formal hipotético-deductiva. Las reglas que rigen las discusiones de estas clases son construidas y apropiadas progresivamente por los alumnos a medida que participan en estos espacios didácticos. Siguiendo la clasificación mencionada, se advierte que las argumentaciones de nuestros alumnos no son sólo simples explicaciones, sino que adquieren muchas veces el carácter de pruebas, a veces

---

<sup>25</sup> Por ejemplo, que la verdad se establece a partir de argumentaciones que hacen derivar unas afirmaciones de otras consideradas verdaderas; que una multiplicidad de ejemplos no bastan para establecer la verdad de un enunciado; que un contraejemplo es suficiente para revisar su falsedad.

<sup>26</sup> Se proponen enseñar a los alumnos las siguientes reglas del debate matemático: un enunciado es verdadero o falso; un contraejemplo basta para demostrar la falsedad de un enunciado; la argumentación se basa en propiedades y definiciones sobre las cuales existe un acuerdo; la multiplicidad de ejemplos que verifiquen un enunciado no bastan para probar que es verdadero; en geometría, la constatación sobre dibujos no basta para probar la verdad de un enunciado.

empíricas o pragmáticas ligadas a casos particulares. Es decir, son explicaciones que, en la discusión, se someten a la aceptación o rechazo racional, argumentado, de los compañeros.

### 6.3. ¿Cómo organizar espacios de discusión en las clases de Matemática?

Mencionamos que un alumno no aprende matemática si no resuelve problemas pero, a su vez, tampoco aprende matemática si sólo resuelve problemas (Brousseau, 1986). Es necesario que los conocimientos empleados, que aparecen como herramientas eficaces para la resolución, puedan ser explicitados, considerados como objetos de reflexión, intentando probar su verdad y vinculándolos con los saberes oficiales (véase el capítulo 3 en este mismo volumen).

En contraste con esta concepción aparecen dos modelos de enseñanza. Por un lado, la enseñanza habitual que consistió -y en algunos casos aún consiste- en que el maestro explicara, mostrara un conocimiento, diera ejemplos y luego los alumnos lo aplicaran resolviendo, tal como él lo hizo, una serie de ejercicios o problemas similares. En tal modelo de enseñanza no caben las verdaderas discusiones, con confrontaciones y argumentaciones; tal vez, sólo cotejar que los resultados obtenidos sean semejantes o descubrir y corregir algún error.

Por otro lado, oponiéndose a esta concepción didáctica, se han desarrollado prácticas de enseñanza que se limitaban -o se limitan- a plantear problemas para que los alumnos resuelvan, suponiendo que el conocimiento surge "espontáneamente" por el solo hecho de enfrentarse a situaciones. En este modelo tampoco caben discusiones con el tipo de intervenciones decisivas del docente como las que hemos analizado, que dirigen el intercambio en la dirección de los saberes que quiere enseñar.

Las discusiones que tratamos apuntan a que los alumnos puedan reflexionar o replantearse lo que hicieron, superando la sola utilización de los conocimientos. Para que puedan tener lugar, es necesario que previamente haya existido una actividad genuina por parte del alumno, algún tipo de trabajo autónomo frente al problema, el despliegue de algún camino o inicio posible de resolución, desde donde otorgar cierto significado a lo que se plantee luego, desde donde poder avanzar en la construcción del sentido de esos conocimientos. Si lo que el alumno hizo ha sido indicado por el maestro, se excluye la posibilidad de que comprenda por qué constituye una herramienta para ese problema -ya que no ha sido movilizado por él mismo, o no puede reconstruir la relación entre el conocimiento y la situación-. En consecuencia, carecerán de sentido los momentos de discusión puesto que el alumno no tendrá dónde anclarlos ni un punto de partida para participar de su desarrollo. En pocas palabras, estos momentos y el modo como se desarrollan se encuentran íntimamente ligados a una concepción particular sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

La organización de estos espacios no deja de presentar *deformaciones*, algunas de las cuales ya han sido relevadas (Saiz, 1995).

- Que se dé lugar a una presentación exhaustiva de los procedimientos de resolución de los alumnos.
- Que se utilicen estos momentos centrándose en la corrección de los procedimientos y resultados obtenidos.
- Que se admita como verdadero algo porque lo sostiene la mayoría como si éste fuera un criterio de verdad. A veces, son los alumnos los que traen este criterio ("está bien porque a la mayoría nos dio igual"); otras veces, esta confusión es instalada por los maestros mismos, por ejemplo, cuando proponen votaciones para decidir acerca de un procedimiento o resultado. No se trata sólo de seleccionar una opción entre otras sino, fundamentalmente, de dar razones.
- Que se confundan los momentos de discusión con la resolución conjunta de un problema.
- Que, tras abrir un panorama de procedimientos utilizados, se sugiera preferencia por alguno.
- Que se conviertan en una nueva rutina escolar. No es necesario que toda actividad sea seguida de una puesta en común. De hecho, algunas actividades se proponen tras una discusión grupal como situaciones donde los alumnos puedan reutilizar aquello que han aprendido en el intercambio. En una rutinización de estas prácticas también se corre el riesgo de esclerosar su funcionamiento, generando tratamientos superficiales de los temas, por ejemplo, se abre a una mínima exposición y se cierra con la enunciación de la versión "oficial".

En cuanto al desarrollo mismo de las discusiones, vimos en las sucesivas clases cómo las maestras proponían problemas ante los cuales los alumnos podían poner en marcha una variedad de procedimientos, cómo alentaban su resolución y actuaban en caso de bloqueos. Pero su tarea comenzaba antes, analizando el

contenido y la situación propuesta, previendo un inventario de las respuestas posibles, y continuaba luego de la resolución de los alumnos seleccionando aquellas producciones –acertadas o no– que aportarían elementos ricos para la discusión.

En los momentos específicos de la discusión, las *intervenciones de las maestras* fueron variadas y dependían de la situación, pero podemos extraer algunas que atraviesan los diferentes ejemplos.

- Someten a discusión algunas de las resoluciones elegidas en función de los objetivos de enseñanza y las posibilidades que el conjunto de los alumnos han movilizado en la resolución. Para ello, invitan a sus autores -o lo hacen ellas mismas- a exponer los procedimientos o las respuestas. La discusión se desarrolla, en algunos casos, de a un procedimiento por vez, es decir, se presenta el primero, se discute sobre él y, luego, se pasa a exponer y discutir el siguiente continuando con una comparación entre ambos, etcétera.
- Aceptan las diferentes respuestas de los alumnos, tanto las correctas como las incorrectas. Es importante tener cuidado de no emitir valoraciones de las respuestas, no sólo a través de lo que el maestro dice a sus alumnos, sino también de gestos, actitudes, tonos, etcétera. Es fundamental que no sancione la validez o invalidez de una respuesta, sino que abra un espacio de incertidumbre que obligue a los alumnos a buscar por sí mismos criterios para establecer si una solución o una afirmación son correctas o no: "Cuando el maestro adopta una actitud de neutralidad –provisoriamente [...]– frente a las posiciones de los alumnos, cuando no establece explícita ni implícitamente su evaluación de lo que dicen o hacen los niños, éstos se ven obligados a argumentar en defensa de sus hipótesis, de sus interpretaciones o de sus estrategias. De este modo, la discusión se profundiza y contribuye efectivamente al progreso del conocimiento" (Lerner, 1996).
- Reformulan algunas explicaciones para que puedan ser comprendidas por todo el grupo; piden aclaraciones y justificaciones ("Yo no entiendo por qué marcan los 18 alumnos de 2° C aquí, en los 27 de 2° A"); hacen preguntas, proponen contraargumentaciones, etcétera. Las preguntas de la maestra se dirigen a toda la clase, no sólo al autor o autores de la resolución y, si un alumno pregunta o le dice algo a la maestra o a otro alumno en particular, ésta lo vuelca hacia todo el grupo.
- Muestran a toda la clase la escritura aritmética correspondiente a lo que los alumnos piensan cuando ellos mismos no pueden formularlo.
- Proponen el análisis de los procedimientos seleccionados, que puede implicar los siguientes aspectos:
  - Cuidar que toda la clase pueda comprender la secuencia de pasos desarrollada.
  - Pedir que se analicen momentos parciales de una resolución: "Hasta acá, ¿qué averiguamos?, ¿qué falta averiguar?", etcétera.
  - Pedir justificación de la pertinencia de los conocimientos movilizados. Por ejemplo, cuando los chicos dicen que 36 es igual a  $30 + 6$  o a  $10 + 10 + 10 + 6$ , es interesante hacer explicitar de dónde surge el 30 o los 10. Una contraargumentación posible, en ese caso, sería: "¿Por qué no puedo desarmar el treinta y seis en tres y sesenta?". Este análisis implica el sentido de los números y operaciones que aparecen en la resolución. Otras intervenciones apuntan a la relación entre el procedimiento propuesto y la situación, es decir, de qué manera los cálculos modelizan la situación: "Estos quince, ¿de qué cosa serían?", "¿Por qué una multiplicación me permite averiguar la respuesta?", etcétera.
  - Hacer notar la diversidad de procedimientos tratando de encontrar semejanzas y diferencias.
  - Promover el análisis de un procedimiento en términos del otro, es decir, cómo está representado cierto aspecto de la situación en uno y otro procedimiento. Por ejemplo: "En esta suma, ¿cómo me doy cuenta de que eran quince negocios?"; "¿Y en esta multiplicación?"; "¿Por qué el número trece aparece una sola vez en la multiplicación y en la suma aparece quince veces?".
  - Las resoluciones erróneas también se constituyen en objeto de discusión del mismo modo que las correctas. Los procedimientos erróneos dan lugar a un trabajo muy fructífero en tanto exigen un análisis y reflexión sobre los conocimientos en juego: poder dar cuenta de por qué una respuesta es correcta o no y advertir dónde está el error demanda una explicitación y justificación en relación con los conocimientos en cuestión. Al respecto, Piaget (1976) decía:

"Un error corregido [por el niño mismo] puede ser más fecundo que un éxito inmediato, porque la comparación de una hipótesis falsa y sus consecuencias provee nuevos conocimientos y la comparación entre dos errores da nuevas ideas". Además, este trabajo posibilita, en parte, el rechazo explícito de los conocimientos que subyacen a algunos errores, rechazo que Brousseau señala como constitutivo del sentido de los nuevos conocimientos. Esto no beneficia sólo al autor del procedimiento erróneo, sino también a aquellos alumnos que produjeron otras respuestas o procedimientos, tanto correctos como incorrectos. A veces, es el docente mismo quien propone una solución errónea como producida supuestamente por un chico de otra clase buscando desafiar a sus alumnos a que establezcan si es válida o no, que intenten explicar dónde reside el error y cómo se lo harían comprender al supuesto autor, introduciéndolos así en un juego de argumentación en relación con el contenido que se está trabajando.

– Proponen reflexionar acerca de las diferencias en términos de economía y confiabilidad. Un procedimiento es más económico cuanto más breve es su desarrollo y más confiable cuanto menos posibilidades de caer en errores conlleva. Desde el punto de vista de un adulto, que domina los procedimientos convencionales, éstos, a la vez de resultar más económicos, resultan más confiables porque la menor extensión de su desarrollo disminuye las posibilidades de "perdersé" o equivocarse y exigen menor atención por su automaticidad. Sin embargo, para un niño que aún no domina un procedimiento, estos criterios no son los mismos: procedimientos menos evolucionados pueden resultarle más confiables aunque costosos en extensión y tiempo. De hecho, para verificar un resultado obtenido mediante algún procedimiento nuevo, muchas veces, los alumnos recurren a procedimientos anteriores. La confiabilidad de un procedimiento depende de los conocimientos disponibles. La apropiación de procedimientos más económicos se realiza progresivamente, a través de situaciones que permitan la utilización, reflexión y sistematización de diferentes estrategias de resolución.

Con este análisis pretendimos puntualizar algunas orientaciones para que el maestro pueda abrir, guiar y sostener estos momentos en sus clases, de modo tal que se profundicen las discusiones, en lugar de cerrarse en un tratamiento superficial de las respuestas y procedimientos.

Reconocemos que trabajar desde esta concepción no es una tarea fácil para los docentes. Aun convencidos de la importancia de la actividad del alumno en la adquisición de los conocimientos, esta modalidad no deja de generarles dudas: ¿podrán todos?, ¿cómo intervenir para ayudar a quien no sabe cómo comenzar?, ¿no sería más seguro decirles lo que tienen que hacer?, ¿cómo es posible sostener provisoriamente conocimientos que no son del todo correctos?, etcétera.

Es cierto que este modelo de enseñanza es costoso en tiempo y, a veces, genera el temor de no avanzar tanto o de no poder llegar a seguir las progresiones que marca la institución escolar. Pero, por otro lado, es un camino inevitable en la construcción de los conocimientos si pensamos que el análisis y la reflexión que movilizan estas discusiones son elementos constitutivos de la comprensión de los conceptos. Piaget (1974) mostró que el éxito en la acción es sólo un nivel de la comprensión. El éxito puede involucrar solamente la utilización de los conocimientos, es una condición necesaria pero no suficiente de la comprensión. Esta última abarca niveles más profundos, consiste en extraer las razones, relaciones, implicaciones que superan ampliamente la relación entre objetivos y medios de resolución que involucra el éxito en la acción.

A pesar de lo arduo que este trabajo puede resultar para el maestro, es sorprendente y emocionante ver a alumnos tan pequeños pensando y reflexionando sobre sus producciones y las de sus compañeros, tratando de apropiarse de un conocimiento matemático, discutiendo sobre la pertinencia, el sentido, la validez. De este modo, se instala también el placer y la confianza en las propias posibilidades intelectuales y el poder compartirlas con otros.

Nos pareció pertinente, pues, detenernos a analizar estos momentos de las clases de Matemática, mostrándolos como espacios indispensables de los procesos didácticos y, a la vez, acercando a los maestros algunos elementos de su organización como herramientas disponibles a la hora de ayudar a sus alumnos en el avance de los conocimientos matemáticos.

---

## BIBLIOGRAFÍA

- Arsac, Gilbert; Gisele Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard y Michel Mante** (1992): *Initiation au raisonnement déductif au college*, Lyon, Presses Universitaires de Lyon.
- Balacheff, Nicolas** (1982): "Preuve et démonstration en mathématiques au college", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3, n° 3, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Broitman, Claudia** (1999): *Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*, Buenos Aires, Novedades Educativas.
- Brousseau, Guy** (1986): "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Charnay, Roland** (1994): "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- ERMEL** (1993): *Apprentissages numériques*. CE1, París, Hatier.
- (1995): *Apprentissages numériques*. CE2, París, Hatier.
- Gilly, Michel** (1988): "Interacciones entre pares y construcciones cognitivas: modelos explicativos", en Anne-Nelly Perret-Clermont y Michel Nicolet (dir.), *Interactuar y conocer Desafíos y regulaciones sociales en el desarrollo cognitivo*, Buenos Aires, Miño y Dávila.
- Laborde, Colette** (1991): "Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques", en Catherine Garnier; Nadine Bednarz e Irina Ulanovskaya, *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale*, Bruselas, De Boeck.
- Lerner, Delia** (1996): "La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición", en José Antonio Castorina, Emilia Ferreiro, Marta Kohl de Oliveira y Delia Lerner, *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*, Buenos Aires, Paidós.
- Lerner, Delia; Patricia Sadovsky y Susana Wolman** (1994): "El sistema de numeración: un problema didáctico", en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Parra, Cecilia e Irma Saiz** (comps.) (1994): *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Piaget, Jean** (1974): *Réussir et comprendre*, París, Presses Universitaires de France.
- (1976): "Le possible, l'impossible et le nécessaire", en *Archives de Psychologie*, XLIV.
- Saiz, Irma** (1995): "¿Confrontación o corrección?", trabajo elaborado para el curso sobre "La resolución de problemas en la escuela primaria", dictado en la Escuela Normal de San Luis del Palmar, Corrientes, mimeo.
- Vergnaud, Gérard** (1979): "Problemas aditivos y complejidad psicogenética", en César Coll (comp.): *Psicología genética y aprendizajes escolares*, México, Siglo XXI.
- (1986): "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n° 2/3, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas.
- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Curricula, Actualización curricular: EGB, *Documento de trabajo* N° 4: Matemática.